Das Unternehmen produziert mit Gesamtkosten

$$K(x) = 10x + 200 \quad \text{wobei } x = x_1 + x_2$$

a) Maximiere den Gesamtgewinn G bei „getrennter Preisfixierung":

$$G(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - K(x_1 + x_2) =$$
$$= (60 - x_1) \cdot x_1 + (40 - \tfrac{1}{3}x_2) \cdot x_2 - 10(x_1 + x_2) - 200 =$$
$$= -x_1^2 - \tfrac{1}{3}x_2^2 + 50x_1 + 30x_2 - 200$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = -2x_1 + 50 \overset{!}{=} 0 \iff x_1 = 25 \quad \Rightarrow p_1 = 60 - 25 = 35$$
$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = -\tfrac{2}{3}x_2 + 30 \overset{!}{=} 0 \iff x_2 = 45 \quad \Rightarrow p_2 = 40 - 15 = 25$$
$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} = -2, \ \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} = -\frac{2}{3}, \ \frac{\partial^2 G}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \Rightarrow \Delta_G(x_1, x_2) > \frac{4}{3} > 0 \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} = -2 < 0 \Rightarrow \text{Max.}\right)$$

$$G(25, 45) = 35 \cdot 25 + 25 \cdot 45 - 700 - 200 = 1100 = G_{max}$$

b) Maximiere den Gesamtgewinn G ohne Preisdifferenzierung auf beiden Märkten

$$x_1(p) = 60 - p \qquad x_2(p) = 120 - 3p \qquad x(p) = (x_1 + x_2)(p) = 180 - 4p$$
$$\Rightarrow p = 45 - \tfrac{1}{4}x$$
$$G(x) = x \cdot p(x) - K(x) = (45 - \tfrac{x}{4})x - 10x - 200 = -\tfrac{x^2}{4} + 35x - 200$$
$$G'(x) = -\tfrac{x}{2} + 35 \quad G'(x_0) = 0 \iff x_0 = 70 \quad G''(x) = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow \text{Maxi an } x_0 = 70$$
$$G_{max} = G(70) = 1025 < 1100 \quad (\text{klar})$$
$$p(x_0) = 45 - \tfrac{x_0}{4} = 27{,}5 \quad \Rightarrow x_1 = 32{,}5; \ x_2 = 37{,}5$$

2.1.3 Optimierung unter Nebenbedingungen

<u>geg.</u>: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g_\nu: D \to \mathbb{R}$ $(\nu = 1, \ldots, m < n)$
f, g_ν diff'bar (2-mal stetig), $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in D$

$\boxed{n = 2, \ m = 1}$ f hat lok. Extremum an x^0 unter der NB $g := g_1 = 0$
$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}(f - \lambda g)(x^0) = 0$, falls $\operatorname{grad} g(x^0) \neq 0$

$L = f - \lambda g$ heißt Lagrange-Funktion
λ " Lagrange-Faktor (L-Multiplikator, -Parameter)

$\boxed{n \geq 2, \ 1 \leq m < n}$ f hat lok. Extremum an x^0 unter NB $g_1 = \cdots = g_m = 0$
$\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit $\operatorname{grad}(f - (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_m g_m))(x^0) = 0$
falls $\operatorname{grad} g_1(x^0), \ldots, \operatorname{grad} g_m(x^0)$ lin. unabhängig sind.