K. Stadtmüller
M. Thalmaier

Sommersemester 2008
18.07.2008

# Probeklausur zur Vorlesung
# Mathematische Methoden in der Ökonomie

(18.07.2008, 15.00 Uhr - 17.00 Uhr)

**Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
**Hilfsmittel:** ein DIN-A-4-Blatt, allerdings mit keinen Beispielen und Übungsaufgaben, nichtprogrammierbarer Taschenrechner
**erreichbare Punkte:** 92, 90 Punkte entsprechen 100%
**Die Klausur ist mit mindestens 45 Punkten bestanden.**

**Viel Erfolg!**

1. Ein Geflügelfarmer züchtet Hühner, Enten und Truthähne.
   Er hat Raum für 1000 Tiere, will aber nicht mehr als 500 Hühner und mindestens 100 Truthähne auf seiner Farm haben. Die Aufzucht einer Ente kostet 1,50 Euro, eines Huhns 1 Euro und eines Truthahns 4 Euro. Die Verkaufspreise sind 3 Euro, 2 Euro bzw. 5 Euro pro Ente, Huhn bzw. Truthahn.
   Nun möchte der Farmer herausfinden, wie viele Hühner, Enten und Truthähne er züchten soll, wenn er seinen Gewinn maximieren möchte und ihm ein Kapital von 1600 Euro zur Verfügung steht.

   a) Formuliere das zugehörige Optimierungsproblem.
   b) Bestimme alle Lösungen des Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus.

   (4+12)

2. Gegeben sei das folgende LOP.

$$
(L) \quad \left\{ \begin{array}{ccc}
F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 & \rightarrow & \max \\
 & & \\
4x_1 + 2x_2 & \leq & 10 \\
3x_1 + x_2 & \leq & 6 \\
2x_2 & \leq & 4 \\
 & & \\
x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array} \right.
$$

   a) Wie lautet das zum LOP (L) duale LOP (D)?
   b) Gib das LOP (D) in Maximierungsform mit $\leq$ -Nebenbedingungen an und berechne die optimale Lösung mit dem Simplexalgorithmus.
   c) Bestimme die optimale Lösung des primalen LOP (L).

   (4+10+2)

3. Löse das folgende LOP mit Hilfe der 2-Phasen-Methode.

$$\begin{cases} F(x_1,x_2) = 3x_1 + x_2 & \rightarrow & \max \\ \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 4x_1 + 5x_2 & = & 24 \\ \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

(10)

4. Steffi und Moritz überlegen eines Samstags unabhängig voneinander, ob sie sich zu Hause auf die Mathe-Klausur vorbereiten oder ob sie dazu an die Uni fahren sollen.
Die verschiedenen Entscheidungen haben dabei folgende Konsequenzen:
Wenn Steffi zu Hause bleibe, wird sie effektiv 4 Stunden arbeiten, während Moritz zu Hause auf 5 Stunden kommt. Ist nur einer der beiden an der Uni, so wird derjenige dort effektiv 6 Stunden arbeiten. Sind jedoch beide an der Uni, so werden sie zwischendurch so lange Kaffee trinken, dass sie nur noch jeweils 3 Stunden arbeiten.

   a) Bestimme das Auszahlungsschema des obigen Spiels.
   b) Untersuche, ob das Spiel Gleichgewichtspunkte besitzt und bestimmt diese gegebenenfalls (mit Begründung).

(2+4)

5. Nachdem General Blotto den ersten Ansturm des Feindes abwehren konnte, versucht dieser ein zweites Mal die Stadt einzunehmen, wenn auch mit reduzierter Stärke.
So stehen dem Feind nur noch 2 Divisionen zur Verfügung, um die Stadt anzugreifen. Auch General Blotto wurde geschwächt: ihm verbleiben nur noch 3 Divisionen, um die zwei Zugangswege $w_1$ und $w_2$ zur Stadt zu sichern. Sowohl Angreifer als auch Verteidiger können ihre Truppen beliebig auf den zwei Wegen verteilen, jedoch kann keine Division weiter aufgeteilt werden.
Falls auf einem Weg mindestens so viele Angriffsdivisionen wie Verteidigungsdivisionen sind, bricht der Feind durch und erobert die Stadt.

   a) Erstelle die Auszahlungsmatrix, wobei 1 den Sieg des Angreifers und -1 den Sieg von General Blotto darstellen soll.
   b) Bestimme den oberen und den unteren Spielwert des Spiels bei reinen Strategien.
   Ist das Spiel determiniert? Gibt es dominante Strategien?
   c) Berechne mögliche optimale gemischte Strategien des Angreifers und General Blottos und den Wert des Spiels. Ist das Spiel fair? (3+4+6)

**Bitte wenden!**

6. Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem.

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 & \rightarrow & \min \\ & & \\ x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & \geq & -1 \\ x_2 & \geq & -1 \end{cases}$$

a) Untersuche, ob die gegebene Zielfunktion und die Nebenbedingungen konvex sind.

b) Prüfe nach, ob die Slater-Bedingung erfüllt ist.

c) Bestimme graphisch eine potentiell Lösung und prüfe mittels des Satzes von Kuhn-Tucker, ob das graphisch ermittelte Ergebnis wirklich eine optimale Lösung ist.

(5+2+12)

7. Es sei $K \subseteq R^n$ eine konvexe Menge und $f_1, \ldots, f_m : K \longrightarrow \mathbb{R}^2$ konvexe Funktionen. Zeige: Jede nichtnegative Linearkombination der Form

$$F(x) := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j \quad \text{mit} \quad \alpha_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$$

ist eine konvexe Funktion auf $K$. (6)

8. a) Kann es bei einem Matrixspiel optimale gemischte Strategien der Form $p = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)^T$ und $q = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)^T$ geben? Begründe deine Antwort.

b) Ist jedes lineare Optimierungsproblem auch ein kovexes Optimierungsproblem? Begründe deine Antwort.

c) In einer Klausur ist nach allen Lösungen einees Linearen Optimierungsproblems gefragt. Ein Student gibt als Lösungen die Punkte $P = (3, 7)$ und $Q = (5, 4)$ an.
Obwohl er keinen Rechenfehler gemacht hat, erhält er bei dieser Aufgabe nicht die volle Punktzahl. Warum?

(2+2+2)