

Mathematische Methoden in der Ökonomie

(Vorlesungshomepage: <http://www.uni-ulm.de/mawi/zawa/lehre/sommer2008/mathe42008.html>)

1. Drei-Finger-Morra

Zwei Spieler zeigen gleichzeitig jeweils einen, zwei oder drei Finger an, nachdem jeder zuvor einen geheimen Tip abgegeben hat, wieviele Finger der andere Spieler anzeigen wird. Gewonnen hat der Spieler dessen Tip richtig ist. Der Verlierer zahlt an den Gewinner einen Geldbetrag in Höhe der Summe der gezeigten Finger. Liegen beide Spieler in ihrem Tip richtig oder beide falsch, so endet das Spiel unentschieden und es gibt keine Auszahlung von den beiden Spielern an den jeweils anderen.

- Bestimme die Strategiemengen der beiden Spieler und die Auszahlungsmatrix des Spiels.
- Bestimme den unteren und den oberen Spielwert.
- Gibt es eine Strategiekombination, die zu einem Nash-Gleichgewicht führt?

2. Minimax-Strategieprofil

Es sei G ein Nullsummenspiel, in dem ein Nash-Gleichgewicht existiert. Es werden einige Auszahlungen von Spieler 1 erhöht, so dass das neue Spiel G' entsteht.

Zeige: G' besitzt kein Nash-Gleichgewicht, in dem Spieler 1 einen geringeren Nutzen erhält als in den Nash-Gleichgewichten von G .

3. abgewandeltes Elfmeter-Schießen

Die Intuition, die hinter dem abgewandelten Elfmeter-Schießen steckt ist die folgende:

Der Schütze kann nach links (L), recht (R) oder in die Mitte (M) schießen. Der Torwart kann nach links (L) oder rechts (R) springen oder in der Mitte (M) stehen bleiben. Die Richtungen sind dabei jeweils aus der Sicht des Schützen zu interpretieren. Außerdem trifft der Schütze sicher den Torbereich.

Wird der Torwart verladen erhält er einen Minuspunkt, der Schütze erhält einen Pluspunkt. Hält der Torwart einen Ball, so erhält er einen Pluspunkt, der Schütze erhält einen Minuspunkt. Schießt der Schütze in die Mitte und der Ball wird gehalten, werden die Boulevard-Zeitungen am nächsten Morgen Spott über ihm ausschütten, weswegen der in diesem Fall 2 Minuspunkte bekommt.

- Formuliere das Elfmeter-Schießen als mathematisches Spiel.
- Ist das Elfmeter-Schießen ein Nullsummenspiel? Falls nein, läßt es sich durch Änderung eines Auszahlungswertes in ein Nullsummenspiel verwandeln?
- Gibt es für den Schützen und den Torwart jeweils eine dominante Strategie?
- Bestimme alle Gleichgewichtspunkte.
- Bestimme den oberen und den unteren Spielwert für den Fall, dass der Spieler für einen in die Mitte geschossenen, gehaltenen Ball nur einen statt zwei Minuspunkte bekommt.

4. General-Blotto-Spiel

Der Feind bedroht mit 4 Divisionen die Stadt S. Von dem Ort P aus, wo sich der Feind mit seinen 4 Divisionen befindet, gibt es zwei Zugangswege w_1 und w_2 nach S. Der Feind kann seine Truppen nach Belieben auf w_1 und w_2 verteilen und gegen S marschieren lassen.

General Blotto muß mit 5 Divisionen dem Feind den Zugang verlegen, um die Stadt S zu verteidigen. Er kann seine Divisionen ebenfalls wahlweise auf w_1 und w_2 verteilen.

Zu berücksichtigen ist, dass sich eine Division nicht weiter zerteilen läßt.

Falls auf einem Zugangsweg mehr Divisionen des Feindes als von General Blotto sind, so bricht der Feind durch und erobert die Stadt.

- a) Erstelle die zugehörige Auszahlungsmatrix, wobei 1 den Sieg des Angreifers und -1 den Sieg von General Blotto bezeichnen soll.
- b) Berechne den Erwartungswert des General-Blotto-Spiels für die gemischten Strategien $p^T = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ für den Feind und $q^T = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ für General Blotto.