

Mathematische Methoden in der Ökonomie

(Vorlesungshomepage: <http://www.uni-ulm.de/mawi/zawa/lehre/sommer2008/mathe42008.html>)

1. Bei einem Spiel wählen zwei Spieler P_1 und P_2 unabhängig voneinander die Zahl 1, 2 oder 3. Sind die beiden Zahlen gleich, so muss Spieler P_2 dem Spieler P_1 einen Betrag in Höhe der gemeinsamen Zahl zahlen. Sind beide Zahlen hingegen verschieden, so muss Spieler P_1 dem Spieler P_2 den Betrag zahlen, den Spieler P_2 als Zahl gewählt hat.
 - a) Stelle die Auszahlungsmatrix dieses Spiels auf und bestimme den oberen und den unteren Spielwert.
 - b) Wir gehen zunächst davon aus, dass der Spieler P_1 der Strategie $p = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ und der Spieler P_2 der Strategie $q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ folgen.
Wie hoch ist der Erwartungswert der Auszahlung an den Spieler P_1 ?
 - c) Berechne die optimalen Strategien für den Spieler P_1 und den Spieler P_2 bei gemischter Erweiterung.

2. abgewandeltes Elfmeter-Schießen (erweitert)

Wir erweitern das abgewandelte Elfmeter-Schießen von Übungsblatt 7. Es soll gelten:

Der Schütze kann nach links (L), rechts (R) oder in die Mitte (M) schießen. Der Torwart kann nach links (L) oder rechts (R) springen oder in der Mitte (M) stehen bleiben. Möglicherweise trifft der Schütze den Torbereich nicht. Die Richtungen sind jeweils aus der Sicht des Schützen zu interpretieren.

Wird der Torwart verladen erhält er einen Minuspunkt, der Schütze erhält einen Pluspunkt. Hält der Torwart einen Ball, so erhält er einen Pluspunkt, der Schütze erhält einen Minuspunkt. Schießt der Schütze in die Mitte und der Ball wird gehalten, werden die Boulevard-Zeitungen am nächsten Morgen Spott über ihm ausschütten, weswegen der in diesem Fall drei Minuspunkte bekommt und der Torwart drei Pluspunkte. Trifft der Schütze das Tor nicht, so erhält er zwei Minuspunkte, der Torwart erhält zwei Pluspunkte.

- a) Formuliere das Elfmeter-Schießen als mathematisches Spiel.
- b) Bestimme den oberen und den unteren Spielwert. Ist das Elfmeter-Schießen fair?
- c) Wir gehen zunächst davon aus, dass der Schütze der Strategie $p = (\frac{4}{10}, \frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{1}{10})$ und der Torwart der Strategie $q = (\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10})$ folgen. Berechne den Erwartungswert des Spielers und des Torwarts.
- d) Wie sehen die optimalen Strategien für den Schützen und den Torwart bei gemischten Strategien aus?

3. EM-Finale

Im Finale der Fußball-EM trifft Deutschland entweder auf Rußland oder Spanien. Deutschland kann drei verschiedene Aufstellungen im Spiel gegen den Kontrahenten Rußland bzw. Spanien zum Einsatz bringen. Rußland und Spanien haben jeweils ebenfalls drei verschiedene Möglichkeiten für ihre Aufstellung.

Aus der Vergangenheit sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten von Deutschland je nach Konstellation der beiden Aufstellungen gegeben durch:

a)

$$R = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 & 0,6 \\ 0,1 & 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

falls der Endspielgegner Rußland lautet.

b)

$$S = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0,6 & 0,5 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

falls der Endspielgegner Spanien lautet.

Bestimme in beiden möglichen Endspielen die optimalen Strategien für die beiden am Finale teilnehmenden Mannschaften.