

## Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 15.05.2009, 11:15 Uhr, vor den Übungen in H22)

1. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \Sigma, P)$  und zwei Ereignisse  $A, B \in \Sigma$ .
  - (a) Es sei  $P(B) > 0$ . Berechne  $P(A | B) + P(A^c | B)$ .
  - (b) Zeige: Falls  $A$  und  $B$  unabhängig sind, dann sind auch  $A^c$  und  $B$  unabhängig.
  - (c\*) Zeige:  $P(A \cup B)P(A \cap B) \leq P(A)P(B)$ .

(2 + 3 + 2 Punkte)
  
2. Das sogenannte Apert-Syndrom ist ein sehr selten auftretender Gen-Defekt. In Deutschland sind ca. 400 Personen davon betroffen. Schätzungen gehen davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person diesen Gendefekt aufweist bei  $\frac{1}{130000}$  liegt. Ein neuer Schnelltest schlägt mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % bei einer kranken und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1 % bei einer gesunden Person an.
  - (a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit positivem Testergebnis tatsächlich an dem Gen-Defekt leidet.
  - (b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit negativem Testergebnis nicht am Apert-Syndrom leidet. *Hinweis:* Verwende (1a)
  - (c) Berechne außerdem die Wahrscheinlichkeit, dass der Test ein falsches Ergebnis zeigt.

(3 + 3 + 3 Punkte)
  
3. Seien  $(\Omega, \Sigma_1)$  und  $(\Omega, \Sigma_2)$  zwei Messräume mit  $\Omega = \{a, b, c\}$  und  $\Sigma_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$  und  $\Sigma_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \Omega\}$ . Gegeben sei außerdem eine Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $2X(a) = X(b) = X(c) = 2$ .
  - (a) Zeige, dass es sich bei  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  tatsächlich um  $\sigma$ -Algebren handelt.
  - (b) Untersuche, ob die Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich  $(\Omega, \Sigma_1)$  oder  $(\Omega, \Sigma_2)$  eine Zufallsvariable ist.
  - (c) Wir erweitern den Raum  $(\Omega, \Sigma_1)$  nun zu einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \Sigma_1, P)$ . Dabei soll gelten:  $P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\}) = \frac{1}{3}$ . Berechne damit die Verteilung und die Verteilungsfunktion von  $X$  und skizziere die Verteilungsfunktion von  $X$ .

(2 + 2 + 2 Punkte)