

## Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 29.05.2009, 11:15 Uhr, vor den Übungen in H22)

1. Eine Zufallsvariable  $X$  sei *Cauchy-verteilt mit Parameter*  $\vartheta$ , d.h. ihre Dichte ist gegeben durch

$$f_X(x) := \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (x - \vartheta)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$

- (a) (i) Skizziere die Dichte von  $X$  für  $\vartheta = 0$ .  
(ii) Skizziere die Dichte der Standardnormalverteilung in dasselbe Schaubild.  
(b) Berechne für  $\vartheta = 0$  die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  in  $[-1, 1]$  liegt.

(3 + 3 Punkte)

2. Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Zufallsvariable und  $a \in (0, \infty)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Dann sind  $Y := aX + b$  und  $Z := aX$  Zufallsvariablen.

- (a) Zeige: Die Verteilungsfunktion von  $Y$  ist gegeben durch

$$F_Y(x) = F_X\left(\frac{x - b}{a}\right).$$

- (b) Zusätzlich zu den obigen Bedingungen sei  $X$  nun absolutstetig. Drücke die Dichte der Zufallsvariablen  $Z$  mit Hilfe der Dichte von  $X$  aus.  
(c) Sei  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Zeige:

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

- (d) Sei  $X \sim N(0, 1)$ . Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten für die Zufallsvariable  $Y$ :  
(1)  $P(3 < Y \leq 5)$  für  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  
(2)  $P(15 \leq Y \leq 20)$  für  $a = 5$ ,  $b = 10$ .

*Hinweis:* Eine Tabelle mit Werten der  $N(0, 1)$ -Verteilung befindet sich auf unserer Homepage.

(3 + 3 + 2 + 2 Punkte)

3. Die gemeinsame Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sei gegeben durch

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} & \text{falls } (x, y) \in [-1, 1] \times [0, \infty) \\ 1 - e^{-y} & \text{falls } (x, y) \in (1, \infty) \times [0, \infty) \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Zeige, dass es sich tatsächlich um eine zwei dimensionale Verteilungsfunktion handelt. Berechne die Verteilung von  $X$  und die Verteilung von  $Y$ .

(5 Punkte)