Prof. Dr. U. Stadtmüller
C. Hering

Sommersemester 2009
29.05.2009
Blatt 5

Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 12.05.2009, 11:15 Uhr, vor den Übungen in H22)

1. Gegeben sei der absolutstetige Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ mit der gemeinsamen Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{3}{16} \cdot x_1^2 \cdot \sin(x_2) & (x_1, x_2) \in [0,2] \times [0,\pi] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne die Randdichten $f_{X_1}(x_1)$, $f_{X_2}(x_2)$ sowie $P\big((X_1, X_2) \in [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]\big)$. Sind die Zufallsvariablen unabhhängig?

(4 Punkte)

2. X und Y seien zwei Zufallsvariablen mit Werten in $\{0,1,2\}$ bzw. $\{1,2,3\}$. Die folgende Tabelle gibt die Zähldichte des Zufallsvektors (X, Y) an.

	Y		
X	1	2	3
0	p_1	p_2	$\frac{1}{7}$
1	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{14}$
2	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{7}$

(a) Bestimme p_1 und p_2 falls p_2 doppelt so groß ist wie p_1.
(b) Bestimme unter (a) die Zähldichte und die Verteilungsfunktion von X bzw. Y.
(c) Sind X und Y unabhängig?

(6 Punkte)

3. Sei $Z \sim U[0, \pi]$ und definiere die Zufallsvariablen $X = \cos(Z)$ und $Y = \sin(Z)$.

(a) Berechne die Verteilungsfunktion $F_{|X|}(x)$ von $|X|$.
(b) Berechne $P(|X| \leq |Y|)$.
(c) Sind X und Y unabhängig?

(10 Punkte)

4.* Sei $\binom{X}{Y} \sim N\left(\binom{\mu_X}{\mu_Y}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right)$, $|\rho| < 1$.
Zeige, dass $F_{X|Y}(x \mid y)$ die Normalverteilung $N\big(\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y), (1-\rho^2)\sigma_X^2\big)$ ist.
Hinweis: Berechne die Dichte $f_{X|Y}$.

(4 Punkte)