Prof. Dr. U. Stadtmüller
C. Hering

Sommersemester 2009
12.06.2009
Blatt 6

Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 19.06.2009, 11:15 Uhr, <u>vor</u> den Übungen in H22)

1. Sei
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (x+\frac{1}{2})2y, & 0 \le x, y \le 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
   (a) Bestimme die Dichte von $X \cdot Y$.
   (b) Bestimme die Dichte von X/Y.

(3 + 3 Punkte)

2. (a) Sei U gleichverteilt auf $(0,1)$. Bestimme die Dichten von $Y := -\frac{1}{\lambda}\log U$, $\lambda > 0$ und $Z := U^2$.
   (b) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Bestimme die Dichte von $Y := e^X$.

(3 + 3 Punkte)

3. (a) Seien $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{N}_0$ unabhängige, diskrete Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und Zähldichten $p_{X_i}(k)$, $k \in \mathbb{N}_0, i = 1,2$ dann heißt die Verteilung der Zufallsvariable $Z := X_1 + X_2$ die (diskrete) Faltung von X_1 und X_2. Zeige dass für die Zähldichte der Faltung gilt:
$$p_Z(n) = p_{X_1+X_2}(n) = P(X_1 + X_2 = n) = \sum_{k=0}^{n} p_{X_1}(n-k)p_{X_2}(k).$$
   Hinweis: Beachte den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit.
   (b) Zeige, dass die Poissonverteilung faltungsstabil ist, d.h. zeige, dass für zwei unabhängige Zufallsvariablen X_1, X_2 mit $X_i \sim \text{Poi}(\lambda_i)$, $\lambda_i > 0$, $i = 1,2$ gilt
$$X_1 + X_2 \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2).$$
   Hinweis: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ (Binomischer Lehrsatz).
   (c) Berechne die Erwartungswerte der Zufallsvariablen X_1 und $X_1 + X_2$ aus (b).

(4 + 3 + 3 Punkte)