Prof. Dr. U. Stadtmüller
C. Hering

Sommersemester 2009
19.06.2009
Blatt 7

Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 26.06.2009, 11:15 Uhr, vor den Übungen in H22)

1. (a) Berechne den Erwartungswert der folgenden Zufallsvariablen:
   i. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
   ii. $X \sim \mathrm{U}(a, b)$.
   iii. $X : \Omega \to \mathbb{N}$ mit $P(X = k) = -\frac{(1-p)^k}{k \ln p}, k \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$.
   iv. X mit $F_X(x) = (1 - 0.8e^{1-x})\mathbb{1}_{\{x \geq 1\}}$.
   Hinweis: Es kann Aufgabe 4 verwendet werden.

   (b) Berechne die Varianz der folgenden Zufallsvariablen:
   i. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
   ii. $X \sim \mathrm{U}(a, b)$.

(5 + 3 Punkte)

2. Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X, Y \sim \mathrm{U}(0, 1)$. Betrachte die Zufallsvariablen $U = \max(X, Y)$ und $V = \min(X, Y)$. Berechne die Kovarianzen $\mathrm{Cov}(X, Y)$ und $\mathrm{Cov}(U, V)$.

(5 Punkte)

3. Seien X_1, X_2, X_3 quadratisch integrierbare Zufallsvariablen (d.h. $\mathbb{E}\left(X_i^2\right) < \infty$) und seien $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Zeige, dass dann gilt:

$$\mathrm{Cov}(aX + bY, Z) = a\,\mathrm{Cov}(X, Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y, Z).$$

(3 Punkte)

4. Sei X eine absolut stetige Zufallsvariable mit $P(X \geq 0) = 1$ und Verteilungsfunktion F_X. Zeige, dass für positive $r > 0$ gilt:

$$\mathbb{E}\left(X^r\right) = \int_0^\infty r x^{r-1}(1 - F_X(x))dx$$

(4 Punkte)