Prof. Dr. U. Stadtmüller
C. Hering

Sommersemester 2009
26.06.2009
Blatt 8

# Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 03.07.2009, 11:15 Uhr, vor den Übungen in H22)

1. (a) Gegeben seien zwei Zufallsvariablen $X_1$, $X_2$ mit $\sigma_i^2$=Var$(X_i) < \infty$ und $\mathbb{E}X_i = 0$, i=1,2. Außerdem bezeichne $\rho =$Cor$(X_1, X_2)$. Zeige, dass gilt:

$$\min_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(X_2 - aX_1)^2 = \sigma_2^2(1-\rho^2) \text{ und die Minimalstelle ist } a^* = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

   (b) Betrachte die Zufallsvariablen $U$ und $V$ aus Aufgabe 2 von Blatt 7. Berechne die Varianzen $\sigma_1^2$ =Var$(U)$ und $\sigma_2^2$ =Var$(V)$. Bestimme die beste lineare Vorhersage von $V$ durch $U$, d.h. finde reelle Zahlen $a$ und $b$, die den Ausdruck $\mathbb{E}(V-(aU+b))^2$ minimieren. Welchen Wert nimmt dieser Ausdruck dann an? Interpretiere das Ergebnis.

(4 + 4 Punkte)

2. Berechne die charakteristische Funktion der folgenden Zufallsvariablen
   (a) $X \sim$ Exp$(\lambda)$, $\lambda > 0$.
   (b) $Y \sim$ Poi$(\lambda)$, $\lambda > 0$.

(3 + 3 Punkte)

3. Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen $X$ mit $P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{2}$ und $Y$ mit Dichte $f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$, für $y \in \mathbb{R}$.
   (a) Berechne die charakteristische Funktion von $X$ und $Y$.
   (b) Berechne unter Verwendung der charakteristischen Funktion $\mathbb{E}X$, Var$(X)$, $\mathbb{E}Y$ und Var$(Y)$.
   (c) Berechne die charakteristische Funktion von $X+Y$.
   (d) Berechne unter Verwendung der charakteristischen Funktion $\mathbb{E}(X+Y)$ und Var$(X+Y)$.

(2 + 2 + 1 + 1 Punkte)