Prof. Dr. U. Stadtmüller
C. Hering

Sommersemester 2009
03.07.2009
Blatt 9

Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 10.07.2009, 11:15 Uhr, vor den Übungen in H22)

1. Wir betrachten eine Blumenwiese auf der schwäbischen Alb. Erfahrungsgemäß sei der Anteil an roten Blumen auf der Wiese 10%. Wie viele Blumen müssen gepflückt werden, dass der Anteil der roten Blumen in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 im Intervall $[0.09, 0.11]$ liegt? Beantworte die Frage auf zwei verschiedene Weisen, einmal mit der Cebysev-Ungleichung und approximativ mit dem Zentralen Grenzwertsatz.

   (6 Punkte)

2. Zur Bestimmung einer physikalischen Einflussgröße μ führt man wiederholt Messungen durch. Die k-te Messung liefert den Wert $Y_k = \mu + X_k$, wobei (X_k) die Messfehler seien. Diese seien unabhängig und identisch verteilt. Es gelte $\mathbb{E}(X_1) = 0$ und $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Um die Größe μ nun zu bestimmen wird das arithmetische Mittel der Messungen $Z_k := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} Y_i$. betrachtet.

   (a) Wie viele Messungen müssen durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% der wahre Wert der Größe μ um höchstens 0.01 von der ermittelten Größe Z_k abweicht. Beantworte diese Frage einmal unter Verwendung der Cebysev Ungleichung und einmal näherungsweise mit dem zentralen Grenzwertsatz.

   (b) Es sei nun bekannt, dass 1000 Messungen durchgeführt wurden. Gib eine Näherung für die Schranke S an, so dass mit 90 %-iger Wahrscheinlichkeit der ermittelte Wert mindestens S beträgt.

   (6 + 3 Punkte)

3. (a) Sei $X_n \sim U[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass gilt $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \frac{1}{2}$, $(n \to \infty)$.

   (b) Sei X_n eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten und (f.s.) beschränkten Zufallsvariablen. Zeige, dass $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{p}} 0$.

   (c*) Sei X_n eine Folge von Zufallsvariablen, so dass gilt: $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante sei. Zeige, dass dann folgt: $X_n \xrightarrow{\mathrm{p}} c$.

   (3 + 2 + 4 Punkte)