Prof. Dr. U. Stadtmüller
C. Hering

Sommersemester 2009
17.07.2009
Blatt 12 (Klausurtraining)

Angewandte Stochastik I

(Ohne Abgabe. Besprechung in der Vorlesung am 22.07.09
und nach der Übung am 24.07.09 in H22)

1. Die Basketballmannschaft von Ratiopharm Ulm gewinnt ein Bundesligaspiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.7, wenn der Star der Mannschaft mitspielt. Falls der Star allerdings nicht dabei ist, beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit nur 50%. Da der Star der Mannschaft an chronischen Knieschmerzen leidet, ist sein Einsatz für das nächste Bundesligaspiel fraglich. Die Ärzte schätzen die Wahrscheinlichkeit, dass er spielen kann auf 20%.
   (a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft das Spiel siegreich gestaltet.
   (b) Nimm nun an, dass das Spiel gewonnen wurde. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ärzte den Star der Mannschaft rechtzeitig fit bekommen haben und er am Spiel teilgenommen hat?
2. Ein Scheckkartenbetrüger hat eine EC-Karte gestohlen. Bekanntermaßen besteht die PIN zu einer solchen Karte aus einer vierstelligen Zahlenkombination. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Betrüger die richtige PIN eingibt, wenn er nur 3 Versuche hat. Wie wären seine Chancen, wenn die Reihenfolge der Zahlen keine Rolle spielen würde? Gehe davon aus, dass der Betrüger so clever ist, dass er eine relevante Zahlenkombination nur einmal ausprobiert.
3. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten für eine $\mathcal{N}(1,9)$-verteilte Zufallsvariable X:
   (a) $P(X \geq 2)$.
   (b) $P(1 < X < 2)$.
   (c) $P(X \geq 4 | X \geq 2)$.
4. Gegeben sei die Funktion $f_X(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|)$.
   (a) Zeige, dass die Funktion $f_X(x)$ eine Dichte ist.
   (b) Berechne die zugehörige Verteilungsfunktion $F_X(x)$.
   (c) Nun sei X eine Zufallsvariable mit $X \sim F_X(x)$. Berechne $\mathbb{E}(X)$ und Var(X).
5. Gegeben sei der Zufallsvektor $(X,Y)^T$ mit Verteilungsfunktion:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ oder } y < 0 \\ e^{-\sqrt{(-\ln(\min(x,1)))^2 + (-\ln(\min(y,1)))^2}}, & \text{sonst} \end{cases}.$$

   Bestimme die Randverteilungen und Randdichten des Zufallsvektors. Sind die Variablen X und Y unabhängig?
6. Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y. Es gelte $Y \sim U(0,1)$ und die Dichte von X sei: $f_X(x) = xe^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Gib die Dichte der Zufallsvariablen $Z = X \cdot Y$ an.
7. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe zum Merkmal X, wobei die Dichte von X gegeben ist durch $f_X(x) = \theta x^{\theta-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.
   (a) Bestimme einen Schätzer für θ mit der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Bestimme einen Schätzer für θ mit der Momentenmethode.

8. Gegeben sei eine Zufallsvariable X deren Dichte gegeben ist durch $f_X(x) = (1-|x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Berechne die charakteristische Funktion dieser Zufallsvariablen und bestimme mit Hilfe der charakteristischen Funktion den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen.

9. Das radioaktive Element Radon zerfällt nach und nach. Die Zufallsvariablen X_k geben die Wartezeiten bis zum nächsten Kernzerfall eines Radon-Atoms an. Wir nehmen an, dass (X_k) unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen seien, für die gelte $X_k \sim \mathrm{P}(\lambda)$. Um den Parameter λ näherungsweise zu bestimmen verwenden wir $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Bestimme $n \in \mathbb{N}$ so, dass die Abweichung zum wahren Parameter λ mit Wahrscheinlichkeit 0.95 höchstens 0.1 beträgt.
Hinweis: Nimm an, dass bekannt sei, dass der "wahre" Parameter $\lambda \leq 1$ ist.

10. Zeige, dass auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ keine diskrete Gleichverteilung definiert werden kann.