



## Übungen zu Grundlagen und Einzelfragen der Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

### Übungsblatt 13

Abgabe: Dienstag, 2. Februar 2010, vor den Übungen

1. Für  $0 < \beta < 1/2$  sei  $C_\beta$  die Menge der stetigen Funktionen  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ , für die es eine Konstante  $c(f) > 0$  gibt mit

$$|f(x)| \leq c(f) \cdot e^{\beta x},$$

für alle  $x \in [0, \infty)$ .

Wir definieren das innere Produkt  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L$  durch:

$$\langle f | g \rangle_L = \int_0^\infty f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx.$$

- (a) Zeige, daß mit dieser Definition  $C_\beta$  zu einem inneren Produktraum wird.  
(b) Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Das  $n$ -te Laguerre- Polynom  $L_n$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_n(x) &= e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n). \end{aligned}$$

Zeige:

$L_n$  ist ein Polynom vom Grad  $n$ .

- (c) Es sei  $X_j : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \rightarrow x^j$  mit  $j \in \mathbb{N}_0$ . Zeige:

$$\langle L_n | X_j \rangle_L = 0,$$

falls  $j < n$ .

- (d) Sie Folge  $(L_n)$  bildet ein Orthogonalsystem, d.h.  $\langle L_m | L_n \rangle_L = 0$  für  $m \neq n$ .

(24 Punkte)