UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Grundlagen und Einzelfragen der Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 2

Abgabe: Montag, 2. November 2009, vor den Übungen

1. Konstruiere ein System $(K, 0, S)$, das aus fünf Elementen besteht und die Axiome $(P1)$ bis $(P5)$ alle mit Ausnahme von $(P3)$ erfüllt. (8 Punkte)

2. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $n = m'$. Auf A_n sei eine Nachfolgerabbildung $T: \ A_n \to A_n$ wie folgt definiert:

$$T(k) := \begin{cases} k' & \text{falls} \quad k \in A_m \\ 0, & \text{falls} \quad k = n. \end{cases}$$

Zeige:

(a) Es existiert genau eine (zweistellige und mit $+$ bezeichnete) Operation $+: \ A_n \times A_n \to A_n$ mit $k + 0 = k$ für alle $k \in A_n$ und $T(k + l) = k + T(l)$ für alle $k, l \in A_n$.
Bezüglich diese Operation ist A_n eine Gruppe.

(b) Es existiert genau eine (zweistellige und mit $\cdot$ bezeichnete) Operation $\cdot: \ A_n \times A_n \to A_n$ mit $k \cdot 0 = 0$ für alle $k \in A_n$ und $k \cdot T(l) = k \cdot l + k$ für alle $k, l \in A_n$.
Diese Operation ist kommutativ, assoziativ, und es gilt das Distributivgesetz:

$$h \cdot (l + k) = (h \cdot l) + (h \cdot k)$$

für alle $h, k, l \in A_n$.

(c) Für $k \in A_n - \{0\}$ gilt die Kürzungsregel

$$l \cdot k = h \cdot k \Rightarrow l = h$$

genau dann, wenn k kein Nullteiler ist, d.h. wenn es kein $g \in A_n - \{0\}$ mit $g \cdot k = 0$ gibt.

(d) Es bildet $A_n - \{0\}$ genau dann eine Gruppe bezüglich der Multiplikation, wenn $A_n - \{0\}$ keine Nullteiler besitzt.
Gib zusätzlich Beispiele für solche n an, so daß $A_n - \{0\}$ nullteilerfrei ist und für solche n, so daß $A_n - \{0\}$ Nullteiler besitzt. (16 Punkte)