UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Grundlagen und Einzelfragen der Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 3

Abgabe: Dienstag, 10. November 2009, vor den Übungen

1. Eine Menge heißt abzählbar, falls es eine surjektive Abbildung $g:\ N \to A$ für ein System $(N, S, 0_N)$ natürlicher Zahlen gibt.
   Beweise: Diese Definition ist von der Wahl des Systems $(N, S, 0_N)$ unabhängig. (6 Punkte)

2. Für endliche Mengen schreiben wir $|A| \leq |B|$, falls es eine injektive Abbildung $A \to B$ gibt.
   Zeige, daß endliche Mengen stets im Sinne der Vorlesung vergleichbar sind.
   Es muß dabei gezeigt werden, daß es immer eine injektive Abbildung in die eine oder andere Richtung gibt, und es darf von den Mengen nur die Endlichkeit angenommen werden. Formulierungen wie „Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \ldots$" dürfen nicht verwendet werden, da wir (in dieser Aufgabe) nicht zählen können. Es darf ohne Beweis verwendet werden, daß $\Phi = \{\phi : A \to B\}$ auch endlich ist und jede Ordnungsrelation (nicht notwendigerweise total) auf endlichen Mengen stets ein minimales und ein maximales Element besitzt. (8 Punkte)

3. Nach dem Rekursionstheorem ist für jede Abbildung $\varphi:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die durch $f(n') = \varphi(f(n))$ und $f(0) = a$ definierte Abbildung eindeutig und wohldefiniert.
   Bestimme zu den folgenden Rekursionen und dem Startwert $f(0) = 1$ die Abbildung f in geschlossener Form und beweise dies durch vollständige Induktion:

   (a) $\varphi(n) = 1 - n$

   (b) $\varphi(n) = an + b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ Konstanten

   Addition und Multiplikation dürfen wie gewohnt verwendet werden. (6 Punkte)

4. Es sei $M(n, \mathbb{R})$ die Menge aller Matrizen vom Typ $n \times n$ mit Einträgen aus $\mathbb{R}$.
   Es ist bekannt, daß $(M(n, \mathbb{R}), +, \cdot)$, wobei $\cdot$ die übliche Matrizenmultiplikation darstellt, einen Ring bildet.
   Definiere eine von dieser verschiedene Multiplikation, so daß wiederum ein Ring erhalten wird.
   (4 Punkte)