UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Grundlagen und Einzelfragen der Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 4

Abgabe: Dienstag, 17. November 2009, vor den Übungen

1. Zeige: Ein endlicher Integritätsring ist stets ein Körper. (6 Punkte)

2. Es sei R ein Ring mit Einselement 1 und $1 \neq 0$. Unter der Charakteristik $\chi(R)$ von R versteht man die kleinste positive Zahl n, so daß $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n-\text{ mal}} = 0$ ist. Gibt es kein solches n, so setzt man $\chi(R) = 0$.
   Zeige: Ist R ein Integritätsring mit Einselement und mit $\chi(R) \neq 0$, so ist $\chi(R)$ eine Primzahl. (8 Punkte)

3. Ein Schiefkörper oder Divisionsring ist ein Ring, der alle Eigenschaften eines Körpers besitzt mit der möglichen Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation.
   (a) Zeige: Ist S ein Schiefkörper mit $|S| = 5$, so ist S ein Körper.
   (b) Es sei $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix} : \ w, z \in \mathbb{C} \right\}$, wobei $\overline{z}$ die zu $z \in \mathbb{C}$ konjugiert komplexe Zahl ist.
   Zeige: Bezüglich der Matrizenaddition und -multiplikation bildet $\mathbb{H}$ einen Schiefkörper, aber keinen Körper. (10 Punkte)