UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 12

Abgabe: Mittwoch, 14. Juli 2010, vor den Übungen

1. Für $\eta \in (0,1)$ sei $E(\eta) := \{x| \ \eta < x < 1\}$ und $f\colon E(\eta) \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = \frac{1}{x}$.
   Für $\epsilon > 0$ sei $\delta_{\max}(\epsilon, \eta)$ das größte $\delta > 0$, so daß für alle x, x_0 mit $x, x_0 \in E(\eta)$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, daß $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ gilt.
   Bestimme $\delta_{\max}(\epsilon, \eta)$. (4 Punkte)

2. Es sei $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf $(0,1)$. Dann existiert $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$.

   Hinweis:
   Betrachte eine beliebige Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in (0,1)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Wende auf die Folgen (x_n) und $(f(x_n))$ das Cauchykriterium an.

   (4 Punkte)

3. Gegeben sei ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und Funktionen $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f Lipschitz- stetig, falls ein $L > 0$ existiert, so daß für alle $x, y \in I$ gilt
   $$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$
   Zeige:
   (a) Wenn f Lipschitz- stetig ist, dann ist f stetig auf I.
   (b) Wenn f und g Lipschitz- stetig sind, so ist auch $f + g$ Lipschitz- stetig. Wenn I darüberhinaus kompakt ist, dann ist auch $f \cdot g$ Lipschitz- stetig.
   (c) Sind die Funktionen $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) = x^2 + 3$ und $g(x) = \sqrt{x}$ definiert sind, Lipschitz- stetig?

   (6 Punkte)

4. Gegeben sei ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$. Zeige, daß f genau dann gleichmäßig stetig auf I ist, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ in I mit $x_n - y_n \to 0$ für $n \to \infty$ auch $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. (4 Punkte)

5. Es sei $\{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ eine Abzählung für $\mathbb{Q}$ und

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{falls} \quad x < 0. \end{cases}$$

Definiere die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot h(x - q_k)$.

Beweise:

(a) Die Reihe, die durch f definiert wird, ist für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

(b) Die Funktion f ist streng monoton wachsend.

(c) Die Funktion f ist an allen irrationalen Stellen stetig und an allen rationalen Stellen unstetig.

(6 Punkte)