UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte und 12 Zusatzpunkte

Übungsblatt 13

Abgabe: Mittwoch, 21. Juli 2010, vor den Übungen

1. In einem Crashtest wird ein Auto gegen eine Wand gefahren. Der Aufprall geschieht zur Zeit $t_0 = 10$. Die Geschwindigkeit zur Zeit t werde durch verschiedene Funktionen $v_j\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $t \to v_j(t)$ mit $j = 1, 2$ beschrieben:

   - $v_1(t) = \begin{cases} 100 & \text{für} \quad 0 \le t \le 10 \\ 0 & \text{für} \quad t > 10 \end{cases}$
   - $v_2(t) = \begin{cases} 100 & \text{für} \quad 0 \le t \le 10 \\ 100 - 10^4(t-10) & \text{für} \quad 10 < t \le 10,01 \\ 0 & \text{für} \quad t > 10,01 \end{cases}$

   (a) Welche der Funktionen v_j mit $j = 1, 2$ ist stetig auf $[0, \infty)$? Die Antwort ist zu begründen.

   (b) Es sei $I = [9, 11]$, $0 < \epsilon < 1$, und $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ habe die folgende Eigenschaft:
   Für alle $t, t_0 \in I$ mit $|t - t_0| < \delta$ gilt: $|v_j(t) - v_j(t_0)| < \epsilon$.
   Entscheide in jedem der beiden Fälle $j = 1, 2$, ob ein solches δ existiert. Im Falle der Existenz gib das größte δ an.

   (c) i. Finde ein Polynom P dritten Grades, so daß die Funktion v_3 mit

   $$v_3(t) = \begin{cases} 100 & \text{für} \quad 0 \le t \le 10 \\ P(t) & \text{für} \quad 10 < t \le 10,01 \\ 0 & \text{für} \quad t > 10,01 \end{cases}$$

   auf $[0, \infty)$ differenzierbar ist.

   ii. Es sei $a = 10$ und $b = 10,01$. Finde ein $\xi \in (a, b)$, so daß

   $$v_3'(\xi) = \frac{v_3(b) - v_3(a)}{b - a}$$

   gilt. (8 Punkte)

2. Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}}$ auf ihrem Definitionsbereich. (4 Punkte)

3. Bestimme alle möglichen Paare (a, b) reeller Zahlen mit der Eigenschaft, daß die durch

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{für} \quad x > 2 \\ (x+b)^2 + a, & \text{für} \quad x \leq 2 \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. (4 Punkte)

4. Es sei $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ sowie $g(x) = x \cdot f(x)$ und $h(x) = x^2 \cdot f(x)$.
Entscheide für jede der Funktionen f, g und h, welche der Eigenschaften Stetigkeit oder Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$ vorliegt. Die Antwort ist zu begründen. (6 Punkte)

5. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Fixpunkt von f, d.h. $f(x_0) = x_0$. Weiter sei f in x_0 differenzierbar und es sei $|f'(x_0)| < 1$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ sei durch $f_0(x) = f(x)$ und $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ definiert.
Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x_0) = 0$. (6 Punkte)

6. Gegeben sei ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine n- mal stetig differenzierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, die in I genau $n+1$ Nullstellen besitze, d.h. es gelte mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, daß $f(x_k) = 0$ für $k = 1, \ldots, n+1$. Zeige, daß ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $f^{(n)}(\xi) = 0$ existiert. (4 Punkte)

7. Gegeben sei ein $a > 0$ und eine stetige und auf $(0, a)$ differenzierbare Funktion $f\colon [0, a] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$.
Zeige: Wenn $f'(x)$ monoton wachsend ist, dann ist auch $\frac{f(x)}{x}$ monoton wachsend. (4 Punkte)