UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 7

Abgabe: Mittwoch, 9. Juni 2010, vor den Übungen

1. Berechne für $n \in \mathbb{N}$ die Summe
$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{j} \frac{1}{2^{k+j}}.$$
(4 Punkte)

2. Untersuche nachstehende Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz:

   (a) $a_n = \dfrac{n^3 + 2n + 3}{n^2 + 1}$

   (b) $a_n = \sqrt{n} \cdot ((\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

   (c) $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

   (d) $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

(6 Punkte)

3. (a) Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei durch $a_0 = 1$ und $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Zeige, daß $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und berechne den Grenzwert.

   (b) Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei durch $a_0 = 1$ und $a_n = \dfrac{1}{1 + a_{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Zeige:
$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$
(6 Punkte)

4. Es sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge und $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} z_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Zeige: Wenn $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ gilt, dann folgt auch $\lim_{n\to\infty} s_n = z$. (4 Punkte)

5. (a) Beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel folgende Aussagen über reelle Folgen (a_n) bzw. (b_n):

      i. $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n + b_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$

      ii. $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert $\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$

   (b) Bestimme $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ (mit kurzer Begründung) für

      i. $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n n}{(-1)^n(1+n)}$

      ii. $a_n = n - 3\left[\dfrac{n}{3}\right]$

(4 Punkte)