



Übungen zu Analysis I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 9

Abgabe: Mittwoch, 23. Juni 2010, vor den Übungen

1. Zeige, daß für jede beschränkte Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} a_m \right).$$

(3 Punkte)

2. (a) Untersuche folgende unendliche Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 - 4n^2}{n^6 + n}$

iv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 1}$

v. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

- (b) Bestimme von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ den eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwert.

(7 Punkte)

3. Was passiert mit der endlichen geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^n x^k$ für $n \rightarrow \infty$?

(2 Punkte)

4. (a) Es seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n+1} \in \mathbb{C}$, und es sei $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$. Zeige:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^n A_k (b_{k+1} - b_k).$$

- (b) Es sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ und $z \neq 1$. Zeige, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1}$ konvergiert. (6 Punkte)

5. Berechne den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{5^n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^{2n}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(3 + (-1)^n)^{7n}}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ mit einem $\alpha \in \mathbb{C}$.

(6 Punkte)