Skript zur Vorlesung

Analysis I

Sommersemester 2010

Prof. Dr. Helmut Maier
Dipl.-Math. Hans- Peter Reck

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie
Universität Ulm

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung, reelle Zahlen

1.1 Allgemeines

Die Analysis ist neben der Linearen Algebra eine der zwei Grunddisziplinen der Mathematik. Fast alle weiterführenden mathematischen Theorien bauen auf ihnen auf. Somit gelten auch für die Analysis die Prinzipien für den Aufbau einer mathematischen Theorie. Eine mathematische Theorie besteht aus folgenden Bestandteilen:

1. Axiome
2. Definitionen
3. Lehrsätze

Wir kommen nun zur Beschreibung dieser Bestandteile:

1. Axiome:
   Dies sind Aussagen, die ohne Beweis als gültig angenommen werden. Die Aussagen werden über Objekte getroffen, über deren Natur nichts weiter ausgesagt wird. Als einer der ersten ist Euklid in seinen "Elementen" auf diese Weise vorgegangen (um ca. 300 v. Chr.). Objekte, über die in den Euklidischen Axiomen Aussagen gemacht werden, sind unter anderem Punkte und Geraden.

   Ein Axiom (A) lautet:

   (A) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

   Euklids Auffassung war, daß unmittelbar einleuchtend ist, was unter Punkten und Geraden zu verstehen ist und daß auch die Aussage (A) unmittelbar einleuchtend ist. Punkte und Geraden wurden dabei als Gegenstände der Natur angesehen. In der modernen Mathematik herrscht diese Auffassung nicht mehr:

Mathematik ist keine Naturwissenschaft!

Ist in einer Theorie von Punkten und Geraden die Rede, so existieren sie unabhängig von der Natur. Macht man Aussagen über Gegenstände der Natur, wie zum Beispiel:

- Licht breitet sich geradlinig aus, oder
- die Bahn eines unbeschleunigten Körpers ist eine Gerade,

so besagt dies, daß die mathematische Theorie "Euklidische Geometrie" gut geeignet ist, die Ausbreitung des Lichts oder die Bewegung von unbeschleunigten Körpern zu beschreiben.
Geraden sind gute Modelle für die Ausbreitung des Lichts oder die Bewegung eines unbeschleunigten Körpers. Jedoch ist eine Gerade nichts, was in der Natur vorkommt.
Diese Unabhängigkeit der Axiome von der Natur hat zur Folge, daß zum Beweis von mathematischen Tatsachen nur die Axiome und was aus ihnen rein logisch abgeleitet wurde, benützt werden dürfen, nicht jedoch die sogenannte "Anschauung", die auf Naturerfahrung beruht.

2. Definitionen:
Diese sind im Grunde nichts anderes als Vereinbarungen, welche Namen gewisse Objekte, Tatsachen oder Eigenschaften, die in der Theorie vorkommen, haben sollen.
Wir werden uns zum Beispiel in dieser Vorlesung auf den Standpunkt stellen, daß wir nicht wissen, was der Begriff 2 ("zwei") bedeutet, bevor er nicht definiert wurde. Die Existenz des Objekts 1 ("eins") wird in den Axiomen gefordert werden, weiter auch die Existenz der Summe.
Die Definition $2 := 1 + 1$ ist dann keine mathematische Aussage, sondern eine Vereinbarung, welchen Namen die Summe $1 + 1$ bekommen soll.

3. Lehrsätze:
Ein Lehrsatz (kurz: Satz, manchmal auch Lemma (Hilfssatz)) besteht aus drei Teilen: Voraussetzung, Behauptung und Beweis.
Die Behauptung macht Aussagen über gewisse Objekte der Theorie (z.B. Punkte, Geraden oder Zahlen). Diese Aussage gilt im allgemeinen nur, wenn die Objekte gewisse Voraussetzungen erfüllen. Die Bedeutung der Objekte muß klar sein, d.h. sofern sie nicht schon in den Axiomen vorkommen, muß schon eine Definition vorliegen. Im Beweis wird dann die Wahrheit der Aussage durch eine Kette von Schlüssen bewiesen. Dabei dürfen nur Tatsachen benützt werden, die entweder in den Axiomen festgestellt wurden oder deren Wahrheit schon früher bewiesen wurde. Berufung auf die Anschauung, etwa "Es ist doch klar, daß durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht" sind nicht zulässig.
Dies bedeutet jedoch nicht, daß die Anschauung wertlos ist. Sie gibt häufig Ideen, wie Beweise zu führen sind, kann als Erinnerungsstütze dienen oder Hinweise liefern, wie die Theorie aufzubauen ist. Wir werden in dieser Vorlesung oft Sachverhalte durch Skizzen veranschaulichen; häufig sind es Skizzen von Graphen von Funktionen. Die Ableitung einer Funktion kann man sich zum Beispiel als Steigung der Tangente an den Graph der

Funktion vorstellen. Diese Skizzen werden jedoch niemals als Beweismittel verwendet werden.
Wir werden beim Aufbau der Theorie nur von Dingen sprechen, die wir schon von einem früheren Teil der Vorlesung kennen. Bei der Wahl der Beispiele, mit denen wir die Theorie illustrieren, und auch bei den Übungsaufgaben werden wir gelegentlich anders verfahren. Um interessante Beispiele zu bekommen, werden wir dann wohlbekannte Dinge, wie etwa die Grundrechenarten, voraussetzen, auch wenn wir sie in der Vorlesung noch nicht besprochen hatten.

1.2 Mengen, Relationen, Abbildungen

Die Objekte einer mathematischen Theorie werden zu Mengen zusammengefaßt. Die Objekte sind dann Elemente dieser Menge. Der Begründer der Mengenlehre, Georg Cantor, gab folgende Beschreibung:

"Definition:"

(i) Unter einer Menge X verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten $x, y, \ldots$ unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente von X genannt werden, zu einem Ganzen, einem neuen Objekt $X = \{x, y, \ldots\}$ unseres Denkens.

(ii) Für "x ist Element von X" schreiben wir $x \in X$ und für "x ist nicht Element von X" dann $x \notin X$.

Diese "Definition" werden wir nicht weiter benützen. Die in ihr vorkommenden Begriffe "Zusammenfassung", "Anschauung" oder "Denken" sind nicht klarer als der zu definierende Begriff "Menge". Wir nehmen an, wir wissen, was eine Menge ist. Sie wird in dem Axiomensystem der reellen Zahlen ein Grundbegriff sein, braucht also nicht definiert zu werden.
Mengen können auf verschiedene Weisen beschrieben werden: die Auflistung ihrer Elemente in geschweiften Klammern oder durch eine charakterisierende Eigenschaft.

Beispiel 1.2.1. Die Menge $X = \{12, 13, 14, 15\}$ kann auch als

$$X = \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl mit } 12 \le x \le 15\}$$

beschrieben werden.

Definition 1.2.1. Wir definieren:

(i) Die Menge, die kein Element enthält, heißt leere Menge und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

(ii) Eine Menge X heißt genau dann Teilmenge einer Menge Y oder in der Menge Y enthalten (Schreibweise: $X \subset Y$), wenn alle Elemente von X auch Elemente von Y sind, in Zeichen: $x \in X \Rightarrow x \in Y$.

Lemma 1.2.1. *Für jede beliebige Menge X gilt $\emptyset \subset X$.*

Beweis. Nach Definition 1.2.1 (*ii*) muß gezeigt werden: $x \in \emptyset \Rightarrow x \in X$.
Dieser Schluß ist richtig, weil die Voraussetzung $x \in \emptyset$ für alle x falsch ist. □

Mengen können verknüpft werden, ähnlich wie Zahlen durch Addition oder Multiplikation verknüpft werden können. Die wichtigsten Verknüpfungen sind Vereinigung und Durchschnitt.

Definition 1.2.2. Es seien X und Y Mengen.

(i) Unter der Vereinigung $X \cup Y$ der Mengen X und Y verstehen wir die Menge aller Elemente, die zu X oder zu Y (oder zu beiden) gehören:

$$X \cup Y := \{x |\ x \in X \ \underline{\text{oder}}\ x \in Y\}.$$

(ii) Unter dem Durchschnitt $X \cap Y$ der Mengen X und Y verstehen wir die Menge aller Elemente, die zu X und zu Y gehören.

Sind gewisse Mengen selbst Elemente einer Menge $\mathcal{M}$, so lassen sich die Vereinigung und der Durchschnitt all dieser Mengen erklären. Um eine kürzere Schreibweise zu erhalten, führen wir Abkürzungen für die sogenannten Quantoren "es gibt ein" und "für alle" ein:
Schreibweise:
Es ist $\exists$ eine Abkürzung für "es gibt" und $\forall$ eine Abkürzung für "für alle".

Definition 1.2.3. Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen.

(i) Unter der Vereinigung $\bigcup_{x\in\mathcal{M}} X$ verstehen wir:

$$\bigcup_{x\in\mathcal{M}} X := \{x |\ \exists x \in \mathcal{M} :\ x \in X\}.$$

(ii) Unter dem Durchschnitt $\bigcap_{x\in\mathcal{M}} X$ verstehen wir:

$$\bigcap_{x\in\mathcal{M}} X := \{x |\ \forall x \in \mathcal{M} :\ x \in X\}.$$

Definition 1.2.4. Es seien X und Y Mengen. Die Differenz von X und Y ist

$$X\backslash Y := \{x |\ x \in X \text{ und } x \notin Y\}.$$

Falls $Y \subset X$, dann heißt die Differenz $X\backslash Y$ auch Komplement von Y in X.
Schreibweise:

$$Y^C := X\backslash Y.$$

Definition 1.2.5. Mengen X und Y heißen <u>disjunkt</u>, wenn sie keine gemeinsamen Elemente besitzen, wenn also $X \cap Y = \emptyset$ gilt.

Für die Verknüpfung von Mengen gelten elementare Gesetze:

Satz 1.2.1 (Elementare Mengengesetze)**.** *Es seien X, Y, Z Mengen. Dann gelten die folgenden Gesetze:*

(i) $X \cup Y = Y \cup X$ *und* $X \cap Y = Y \cap X$ *(Kommutativgestz)*

(ii) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ *und*
$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ *(Assoziativgestz)*

(iii) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ *und*
$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ *(Distributivgesetz)*

(iv) $Z \backslash (X \cup Y) = (Z \backslash X) \cap (Z \backslash Y)$ *und*
$Z \backslash (X \cap Y) = (Z \backslash X) \cup (Z \backslash Y)$ *(de Morgansche Regeln)*

Beweis. Wir zeigen nur (i) und einen Teil von (iii):
(i) Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in X \cup Y \quad &\underset{\text{Def. 1.2.2 (i)}}{\Leftrightarrow} \quad x \in X \ \underline{\text{oder}}\ x \in Y \\ &\Leftrightarrow \quad x \in Y \ \underline{\text{oder}}\ x \in X \underset{\text{Def. 1.2.2 (i)}}{\Leftrightarrow} x \in Y \cup X. \end{aligned}$$

Also ist $X \cup Y = Y \cup X$.

$$\begin{aligned} x \in X \cap Y \quad &\underset{\text{Def. 1.2.2 (ii)}}{\Leftrightarrow} \quad x \in X \ \underline{\text{und}}\ x \in Y \\ &\Leftrightarrow \quad x \in Y \ \underline{\text{und}}\ x \in X \underset{\text{Def. 1.2.2 (ii)}}{\Leftrightarrow} x \in Y \cap X. \end{aligned}$$

Damit ist auch $X \cap Y = Y \cap X$.

(iii) Wir zeigen lediglich $X \cap (Y \cup Z) \subset (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$:

$$x \in X \cap (Y \cup Z) \Rightarrow x \in X \text{ und } x \in (Y \cup Z)$$

Insbesondere gilt $x \in Y$ oder $x \in Z$.
<u>1. Fall:</u> $x \in Y$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad x \in X \ \underline{\text{und}}\ x \in Y \underset{\text{Def. 1.2.2 (ii)}}{\Rightarrow} x \in X \cap Y. \\ &\Rightarrow \quad x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z). \end{aligned}$$

<u>2. Fall:</u> $x \in Z$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad x \in X \ \underline{\text{und}}\ x \in Z \underset{\text{Def. 1.2.2 (ii)}}{\Rightarrow} x \in X \cap Z \\ &\Rightarrow \quad x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z). \end{aligned}$$

In beiden Fällen gilt also die Behauptung. $\square$

Definition 1.2.6. Es seien x, y Objekte. Unter dem Paar (x, y) verstehen wir die Menge

$$(x, y) \colon = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Bemerkung 1.2.1. Im Unterschied zu der Menge $\{x, y\}$, bei der es auf die Reihenfolge der x und y nicht ankommt, es ist nämlich $\{x, y\} = \{y, x\}$, kommt es beim Paar (x, y) sehr wohl auf die Reihenfolge an: x steht an erster Stelle, y an zweiter Stelle. Die Begriffe "Reihenfolge", "erste Stelle" bzw. "zweite Stelle" sind jedoch keine Grundbegriffe. Als Mathematiker wissen wir bisher noch nicht, was sie bedeuten. Es bleibt also nur die Möglichkeit, den Begriff "Paar" auf eine kompliziert anmutende Weise, wie z. B. durch Definition 1.2.6 zu definieren.

Definition 1.2.7. Es seien X und Y Mengen. Unter dem kartesischen Produkt $X \times Y$ verstehen wir die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$, also

$$X \times Y \colon = \{(x, y) |\ x \in X, y \in Y\}.$$

Wir schreiben $X^2 \colon = X \times X$.

Beispiel 1.2.2. Es sei $A = \{a, b\}$ und $B = \{0, 1, \omega\}$. Dann ist

$$A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (a, \omega), (b, 0), (b, 1), (b, \omega)\}.$$

Definition 1.2.8. Es seien X und Y Mengen. Unter einer Relation von X zu Y versteht man eine Teilmenge $R \subset X \times Y$. Dabei steht $x \in X$ in R- Relation zu $y \in Y$, wenn $(x, y) \in R$ gilt, in Zeichen xRy. Ist $X = Y$, so heißt R eine Relation auf X.
Wie Mengen können auch Relationen durch charakterisierende Eigenschaften beschrieben werden.

Beispiel 1.2.3. Es sei $X = \{0, 2, 4\}$ und $Y = \{0, 1, 2, 3\}$. Wir definieren die Relation D:

$$xDy \Leftrightarrow x = 2y,$$

oder: x ist das Doppelte von y.
So ist

$$D = \{(0, 0), (2, 1), (4, 2)\}.$$

Definition 1.2.9. Ist R eine Relation von X zu Y, so ist die inverse Relation R^{-1} als Relation von Y zu X durch

$$R^{-1} \colon = \{(y, x) \in Y \times X |\ (x, y) \in R\}$$

erklärt.

Beispiel 1.2.4. Es sei $X = \{1, 2, 7, 8\}$ und $R :=$ "$<$" auf X.
Dann ist $R^{-1} =$"$>$". Also ist

$$R = \{(x, y) \in X^2 |\ x < y\} = \{(1, 2), (1, 7), (1, 8), (2, 7), (2, 8), (7, 8)\}$$

und

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{(y, x) \in X^2 |\ x < y\} = \{(2, 1), (7, 1), (8, 1), (7, 2), (8, 2), (8, 7)\} \\ &= \{(y, x) \in X^2 |\ (x, y) \in R\}. \end{aligned}$$

Definition 1.2.10. Eine Relation R auf einer Menge X heißt

- reflexiv, wenn $\forall x \in X$ gilt: xRx,
- symmetrisch, wenn $\forall x, y \in X$ gilt: $xRy \Rightarrow yRx$,
- transitiv, wenn $\forall x, y, z \in X$ gilt: xRy und $yRz \Rightarrow xRz$.

Eine Relation, die zugleich reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt Äquivalenzrelation.

Definition 1.2.11. Es seien X, Y Mengen. Eine Relation $f \subseteq X \times Y$ heißt Abbildung oder Funktion von X in Y, wenn es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit xfy gibt. In diesem Fall schreiben wir auch: $y = f(x)$.
Die Menge X heißt Definitionsbereich und Y heißt Wertebereich von f. Man nennt $y = f(x) \in Y$ das Bild von $x \in X$, und x heißt Urbild von $y = f(x)$.

Definition 1.2.12. Es seien X, Y Mengen und f eine Abbildung von X in Y.

(i) Das Bild einer Teilmenge $A \subset X$ ist die Menge der Bilder aller Elemente aus A:

$$f(A) := \{y \in A |\ \exists x \in A \text{ mit } y = f(x)\}.$$

(ii) Das Bild des gesamten Definitionsbereichs, $f(X)$ heißt Bild von f und wird mit Imf bezeichnet.

(iii) Das Urbild von $B \subset Y$ ist die Menge aller Elemente $x \in X$, deren Bilder in B liegen:

$$f^{-1}(B) := \{x \in X |\ f(x) \in B\}.$$

Definition 1.2.13. Es seien $A \subset X$ und $B \subset Y$. Eine Abbildung $g\colon A \to B$ mit $g(x) = f(x)$ und $f(x) \in B$ für alle $x \in A$ heißt eine Restriktion oder Einschränkung von f. Umgekehrt ist f eine Erweiterung von g.
Die Abbildung

$$f_{|A}\colon A \to Y \quad \text{mit} \quad f_{|A}(x) = f(x) \quad \text{für} \quad x \in A$$

nennt man die Restriktion von f auf A.

Definition 1.2.14. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt

- injektiv (eineindeutig), falls aus $f(x_1) = f(x_2)$ die Aussage $x_1 = x_2$ folgt,
- surjektiv, falls $Imf = Y$ gilt,
- bijektiv, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Satz 1.2.2. *Es seien X, Y Mengen und f eine Abbildung von X in Y. Die zu f inverse Relation f^{-1} ist genau dann eine Abbildung, wenn f bijektiv ist.*

Beweis. f^{-1} Abbildung $\underset{Def. 1.2.11}{\Leftrightarrow}$ $\forall y \in Y\ \exists$ genau ein $x \in X$ mit $yf^{-1}x$
$\underset{Def. 1.2.9}{\Leftrightarrow}$ $\forall y \in Y\ \exists$ genau ein $x \in X$ mit xfy $\underset{Def. 1.2.14}{\Leftrightarrow}$ f bijektiv. □

Beispiel 1.2.5. Wir werden uns später ausschließlich mit dem Fall $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ befassen. Funktionen werden dann z. B. so notiert:

$$f\colon [0,3] \to \mathbb{R}, \quad x \to 7x.$$

Dabei bedeutet $[0,3]$ das Intervall $[0,3] = \{x|\ 0 \leq x \leq 3\}$.
Die Funktion f ist injektiv wegen

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Leftrightarrow\ 7x_1 = 7x_2 \ \Leftrightarrow\ x_1 = x_2.$$

Aber f ist nicht surjektiv aufgrund

$$0 \leq x \leq 3 \ \Leftrightarrow\ 0 \leq 7x \leq 21.$$

Es ist $Imf = [0,21]$, aber nicht $Imf = \mathbb{R}$.
Die Abbildung $g\colon [0,3] \to [0,21]$, $x \to 7x$ ist bijektiv.

Beispiel 1.2.6. Die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^4$$

ist weder injektiv noch surjektiv.
Es ist $f(x) = f(-x)$, z. B. $f^{-1}(\{16\}) = \{-2, 2\}$. Außerdem gilt stets $f(x) > 0$, also ist nicht $Imf = \mathbb{R}$. Die Restriktion $f_{|[0,\infty]}$ ist injektiv.

Definition 1.2.15. Es seien X, Y_1, Y_2, Z Mengen sowie $g\colon X \to Y_1$ und $f\colon Y_2 \to Z$ Abbildungen mit $g(X) \subset Y_2$. Dann versteht man unter der Komposition von f und g die Abbildung

$$f \circ g\colon X \to Z \quad \text{mit} \quad (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

Beispiel 1.2.7. Es seien

$$\begin{aligned} g\colon &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g(x) = 2x + 1 \\ f\colon &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(y) = y^2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2.$$

Definition 1.2.16. Es sei X eine Menge. Die Abbildung $id:\ X \to X$, $x \to x$ heißt die Identität auf X.

Satz 1.2.3. *Es seien X, Y Mengen und f eine bijektive Abbildung von X in Y mit inverser Abbildung $f^{-1}\colon Y \to X$. Dann ist*

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id.$$

Also ist $f(f^{-1}(x)) = x$ und $f^{-1}(f(x)) = x$.

Beweis. Nach Definition 1.2.9 (inverse Abbildung) ist $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Also gilt

$$y = f(f^{-1}(x)) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = f^{-1}(y) \underset{f^{-1}\ \text{bijektiv}}{\Leftrightarrow} x = y \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = x.$$

□

1.3 Die reellen Zahlen

Wir kommen nun zu den Axiomen (unbewiesenen Grundtatsachen) für die reellen Zahlen. Diese Axiome lassen sich in drei Gruppen gliedern. Die erste Gruppe, die Körperaxiome, beschreiben, wie mit reellen Zahlen gerechnet wird, d.h. die Addition und die Multiplikation reeller Zahlen. Dadurch sind die reellen Zahlen aber noch lange nicht charakterisiert. Es gibt Körper, das sind Strukturen, die ebenfalls die Körperaxiome erfüllen, die völlig anders aussehen als die reellen Zahlen. Die zweite Gruppe, die Anordnungsaxiome zeigen, daß die reellen Zahlen der Größe nach verglichen werden können. Sie bilden einen angeordneten Körper. Es gibt wiederum angeordnete Körper, die andere Eigenschaften aufweisen als die reellen Zahlen, etwa die rationalen Zahlen. Die dritte Gruppe, die nur aus einem einzigen Axiom, dem Vollständigkeitsaxiom, besteht, schließt die Charakterisierung ab.

Ein Körper ist eine Menge mit zwei inneren Verknüpfungen, Addition und Multiplikation genannt. Wir sollten daher zuerst klären, was unter einer Verknüpfung zu verstehen ist.

Definition 1.3.1. Eine Verknüpfung $\circ$ auf einer Menge X ist eine Abbildung $\circ\colon X \times X \to X$. Das Bild eines Paares (x, y) wird das Ergebnis der Verknüpfung genannt und mit $x \circ y$ bezeichnet. Verknüpfungen können mit jedem beliebigen Symbol (neben $\circ$) bezeichnet werden. Ist das Symbol $+$ (Pluszeichen), so heißt die Verknüpfung Addition, und das Ergebnis $x + y$ wird als Summe von x und y bezeichnet. Ist das Symbol $\cdot$ (Multiplikationspunkt), so heißt diese Multiplikation, und dementsprechend wird das Ergebnis $x \cdot y$ als Produkt von x und y bezeichnet.

Wichtige Strukturen mit einer Verknüpfung sind die Gruppen:

Definition 1.3.2. Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \circ)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ$ auf G, so daß gilt:

(G1) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz).

(G2) Es existiert ein Element e, neutrales Element (oder Einselement) genannt, so daß $e \circ a = a$ für alle $a \in G$.

(G3) Ist ein neutrales Element $e \in G$ gegeben, so gibt es zu jedem $a \in G$ ein inverses Element $a^{-1} \in G$, so daß $a^{-1} \circ a = e$.

Gilt zusätzlich noch, daß das Ergebnis der Verknüpfung von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig ist, so heißt G eine kommutative oder abelsche Gruppe (nach N. H. Abel). Es gilt also

(G4) $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$ (Kommutativgesetz).

Bemerkung 1.3.1. Wird die Verknüpfung als Addition geschrieben, so wird das neutrale Element auch als Null bezeichnet (Schreibweise: 0). Das inverse Element eines Elements a wird dann mit $-a$ bezeichnet und heißt das Negative von a. Wird die Verknüpfung als Multiplikation geschrieben, so wird das neutrale Element auch als Eins bezeichnet (Schreibweise: 1).
Ein Körper ist ein Paar $((K, +), \cdot)$, wobei $(K, +)$ eine abelsche Gruppe, deren Verknüpfung $+$ Addition genannt wird, mit neutralem Element 0 ist, während $\cdot$ eine weitere Verknüpfung auf K ist, Multiplikation genannt, so daß $(K\backslash\{0\}, \cdot\}$ eine abelsche Gruppe ist.
Addition und Multiplikation sind durch das Distributivgesetz verbunden:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Die erste Gruppe von Axiomen für die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind also folgende Körperaxiome:

Auf $\mathbb{R}$ existieren zwei Verknüpfungen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation), sowie Elemente 0 (Null) und 1 (Eins) mit $0 \neq 1$, so daß folgende Gesetze gelten:

(K1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. (Assoziativgesetz).

(K2) $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$. (Kommutativgesetz).

(K3) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (Distributivgesetz).

(K4) $a + 0 = a$ und $a \cdot 1 = a$ (Existenz neutraler Elemente).

(K5) Für alle $a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$ und
für alle $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\exists$ a^{-1} mit $a \cdot a^{-1} = 1$ (Existenz inverser Elemente).

Definition 1.3.3. Das multiplikative Inverse a^{-1} wird auch Reziprokes oder Kehrwert von a genannt und "a hoch minus eins" gelesen.
Wir lassen künftig die Multiplikationspunkte weg und folgen der Regel "Punkt vor Strich", d.h. wenn keine Klammern das Gegenteil besagen, wird die Multiplikation vor der Addition ausgeführt, so kann z. B. das Distributivgesetz als $a(b + c) = ab + ac$ formuliert werden.

Die zweite Gruppe von Axiomen sind folgende Anordnungsaxiome:

Es gibt eine Relation "$<$" (sprich: kleiner) auf $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}$, so daß folgende Gesetze gelten:

(A1) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt stets eine und nur eine der Beziehungen $a < b$, $a = b$ und $b < a$. (Trichotomiegesetz).

(A2) $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$. (Transitivitätsgesetz).

(A3) Ist $a < b$, so gilt $a+c < b+c \; \forall \; c \in \mathbb{R}$ und $ac < bc \; \forall \; c \in \mathbb{R}$ mit $0 < c$. (Monotoniegesetze).

Definition 1.3.4. Die zu der Relation "$<$" inverse Relation ist die Relation "$>$" (größer). Die Zeichen "$\leq$" bzw. "$\geq$" bedeuten kleiner oder gleich bzw. größer oder gleich.

Bemerkung 1.3.2. Jeder Körper, der außer den Körperaxiomen $(K1) - (K5)$ auch noch die Anordnungsaxiome $(A1) - (A3)$ erfüllt, heißt angeordneter Körper.

Zur Formulierung des letzten Axioms, des Vollständigkeitsaxioms, brauchen wir zunächst folgende

Definition 1.3.5. Es sei $X \subset \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$. Dann heißt s eine obere Schranke von X, falls $x \leq s$ für alle $x \in X$ gilt. Falls eine obere Schranke von X existiert, heißt $X \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Man nennt s kleinste obere Schranke oder Supremum von X, falls s eine obere Schranke von X ist und für alle oberen Schranken t von X gilt, daß $s \leq t$ ist.

Nun können wir noch unser letztes Axiom formulieren:

(V) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge besitzt ein Supremum (Vollständigkeitsaxiom, Supremumsaxiom).

1.4 Ungleichungen, Rechenregeln, Betrag

Wir zeigen nun einige unmittelbare Folgerungen aus den Axiomen für die reellen Zahlen. Es werden sich vertraute Regeln über die Umformung von Ungleichungen und Regeln über das "Bruchrechnen" ergeben.

Satz 1.4.1. *(Kürzungsregel)*
Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.

(ii) Ist $c \neq 0$, *so gilt* $ac = bc \Rightarrow a = b$.

Beweis. (i) $a + c = b + c \underset{(K5)}{\Rightarrow} (a + c) + (-c) = (b + c) + (-c) \underset{(K1)}{\Rightarrow} a + (c + (-c)) = b + (c + (-c)) \Rightarrow a + 0 = b + 0 \underset{(K4)}{\Rightarrow} a = b$.

(ii) $ac = bc \underset{(K5)}{\Rightarrow} (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} \underset{(K1)}{\Rightarrow} a(c \cdot c^{-1}) = b(c \cdot c^{-1}) \Rightarrow a \cdot 1 = b \cdot 1 \underset{(K4)}{\Rightarrow} a = b$.

□

Bevor wir fortfahren, müssen wir einen Punkt klären, der leicht zu übersehen ist. In den Axiomen $(K4)$ und $(K5)$ wurde zwar die Existenz der neutralen Elemente (0 und 1) sowie die Existenz der Inversen gefordert. Es wurde jedoch nicht die Eindeutigkeit dieser Objekte gefordert. Dies ergibt sich jedoch als Folgerung.

Satz 1.4.2. *(Eindeutigkeit der neutralen Elemente und der Inversen)* *(i) (Eindeutigkeit der Null):*

$$a + 0' = a \quad \textit{für ein} \quad a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad 0' = 0.$$

(ii) (Eindeutigkeit der Eins):

$$a \cdot 1' = a \quad \textit{für ein} \quad a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad 1' = 1.$$

(iii) (Eindeutigkeit der Negativen):

$$\forall a \in \mathbb{R}: \quad a + x = 0 \quad \Rightarrow x = -a.$$

(iv) (Eindeutigkeit des Kehrwerts):

$$\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}: \quad a \cdot x = 1 \quad \Rightarrow x = a^{-1}.$$

Beweis. Die Beweise von Satz 1.4.2 (i), (ii) ergeben sich aus der Kürzungsregel (Satz 1.4.1):

(i) $a + 0' = a = a + 0 \underset{S.1.4.1(i)}{\Rightarrow} 0' = 0.$

(ii) $a \cdot 1' = a = a \cdot 1 \underset{S.1.4.1(ii)}{\Rightarrow} 1' = 1$

(iii) $a + x = 0 \underset{(K5)}{\Rightarrow} (-a) + (a + x) = 0 + (-a) \underset{(K1)}{\Rightarrow} (-a + a) + x = 0 + (-a) \underset{(K4),(K5)}{\Rightarrow} x = -a.$

(iv) Beweisskizze: Multiplikation mit a^{-1}. Sonst analog zu (iii).

$\square$

Satz 1.4.3. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

(ii) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab)$

(iii) $(-a) \cdot (-b) = ab$

(iv) $a \cdot (b - c) = (b - c) \cdot a = ab - ac$

(v) $-(-a) = a.$

Beweis. Es ist

(i) $a \cdot 0 \underset{(K4)}{=} 0 + (a \cdot 0) = a \cdot (0 + 0) \underset{(K3)}{=} (a \cdot 0) + (a \cdot 0)$, also $0 + (a \cdot 0) = (a \cdot 0) + (a \cdot 0) \underset{S.1.4.1(i)}{\Leftrightarrow}$ $a \cdot 0 = 0.$

(ii) $0 \underset{(i)}{=} 0 \cdot b = (a+(-a)) \cdot b = ab+(-a) \cdot b$. Aus der Eindeutigkeit des Negativen (Satz 1.4.2 (ii)) folgt: $(-a) \cdot b = -(ab)$. Es folgt $a \cdot (-b) = -(ab)$ wegen $a \cdot (-b) = (-b) \cdot a$ durhh "Umbenennen" daraus.

(iii) $0 \underset{(i)}{=} 0 \cdot (-b) \underset{(K5)}{=} (a+(-a))(-b) \underset{(K3)}{=} a \cdot (-b) + (-a)(-b) \underset{(ii)}{=} -(ab) + (-a)(-b) \underset{S.1.4.2(ii)}{\Rightarrow} (-a)(-b) = ab$.

(iv) ohne Beweis

(v) ohne Beweis

$\square$

Bemerkung 1.4.1. Wir vereinbaren auch für das Minuszeichen eine Punkt- vor- Strich- Regel:

$$ab - cd := (a \cdot b) - (c \cdot d).$$

Unter $a - b$ verstehen wir $a + (-b)$.

Definition 1.4.1. Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wir schreiben

$$\frac{a}{b} := ab^{-1}.$$

Insbesondere ist $\frac{1}{b} := b^{-1}$.

Satz 1.4.4. *(Bruchrechnen) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b, d \neq 0$. Dann gilt:*

(i) $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$

(ii) $\frac{1}{(-b)} = -\frac{1}{b}$

(iii) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

(iv) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$*, falls auch* $a \neq 0$.

Beweis. Übungen $\square$

Definition 1.4.2. Man nennt $a \in \mathbb{R}$

- positiv, wenn $a > 0$ und
- negativ, wenn $a < 0$.

Satz 1.4.5. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(i) $0 < 1$

(ii) $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

(iii) $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$

(iv) $a < b \Leftrightarrow -b < -a$

(v) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Beweis. Wir beweisen nur (ii): $b - a > 0 \underset{(A3)}{\Leftrightarrow} (b-a) + a > 0 + a \Leftrightarrow b > 0$. □

Satz 1.4.6. *(Addition von gleichsinnigen Ungleichungen)*
Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$.

Beweis. Aus der Monotonie $(A3)$ folgt $a + c < b + c$ und $b + c < b + d$. Mit der Transitivität $(A2)$ gilt dann $a + c < b + d$. □

Satz 1.4.7. *(Durchmultiplikation von Ungleichungen)*
Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, und es sei $a < b$.

(i) Ist $c > 0$, so folgt $ac < bc$.

(ii) Ist $c < 0$, so folgt $bc < ac$.

Beweis. (i) ist Axiom $(A3)$ (Monotoniegesetz)

(ii) Nach Satz 1.4.5 (ii) ist $-c > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a < b \quad & \underset{S.1.4.5(ii)}{\Leftrightarrow} \quad b - a > 0 \underset{\substack{-c>0 \\ (A3)}}{\Leftrightarrow} (b-a)(-c) > 0 \Leftrightarrow (a-b) \cdot c > 0 \\ & \underset{S.1.4.3(iv)}{\Leftrightarrow} \quad ac - bc > 0 \underset{S.1.4.5(ii)}{\Leftrightarrow} bc < ac. \end{aligned}$$

□

Satz 1.4.8. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ Dann folgt*

$$ab > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0 \text{ und } b > 0) \quad \underline{\text{oder}} \quad (a < 0 \text{ und } b < 0).$$

Beweis. ohne Beweis □

Satz 1.4.9. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$. Dann gilt*

$$\frac{a}{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0 \text{ und } b > 0) \quad \underline{\text{oder}} \quad (a < 0 \text{ und } b < 0).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst

(*) $b > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > 0$.

Nach $(A1)$ (Trichotomie) gilt genau einer der Fälle

$$\frac{1}{b} < 0, \quad \frac{1}{b} = 0, \quad \frac{1}{b} > 0.$$

<u>Annahme:</u>

- $\frac{1}{b} = 0 \Rightarrow 1 = b \cdot \frac{1}{b} = 0$ im Widerspruch zu $0 \neq 1$.
- $\frac{1}{b} < 0 \underset{(A3)}{\Rightarrow} b \cdot \frac{1}{b} < 0 \cdot b \underset{S.1.4.3(i)}{\Rightarrow} 1 < 0$ im Widerspruch zu Satz 1.4.5.

Also gilt $(*)$.
Wir kommen nun zum Beweis der Behauptung:
"$\Leftarrow$:"

<u>Fall 1:</u>

$$a > 0,\ b > 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} a > 0,\ \frac{1}{b} > 0 \underset{(A3)}{\Rightarrow} \frac{a}{b} > 0.$$

<u>Fall 2:</u>

$$\begin{aligned} a < 0,\ b < 0 \quad &\underset{S.1.4.5(iii)}{\Rightarrow} \quad -a > 0,\ -b > 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} -a > 0,\ -\frac{1}{b} > 0 \\ &\underset{(A3)}{\Rightarrow} \quad \frac{-a}{-b} > 0 \underset{S.1.4.4(ii)}{\Rightarrow} \frac{a}{b} > 0. \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$:"
Zunächst folgt $a \neq 0$, denn $a = 0 \underset{S.1.4.3(i)}{\Rightarrow} a \cdot \frac{1}{b} = 0$.
<u>Annahme:</u>
Die Behauptung ($a > 0$ und $b > 0$) oder ($a < 0$ und $b < 0$) ist falsch.
Dann muß wegen $(A1)$ (Trichotomie) einer der folgenden Fälle zutreffen:

<u>Fall 1:</u> $a > 0$ und $b < 0$

<u>Fall 2:</u> $a < 0$ und $b > 0$

Diese beiden Fälle schließen wir der Reihe nach aus.

<u>Fall 1:</u> $a > 0,\ b < 0 \Rightarrow -a < 0,\ b < 0$. Nach der schon bewiesenen Richtung "$\Leftarrow$:" folgt dann $-\frac{a}{b} > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Fall 2: $a < 0$ und $b > 0 \Rightarrow -a > 0,\ -b < 0 \underset{''\Leftarrow:''}{\Rightarrow} \frac{-a}{-b} < 0 \underset{S.1.4.4(iv)}{\Rightarrow} \frac{a}{b} < 0$, ebenfalls ein Widerspruch.

$\square$

Definition 1.4.3. (Vorzeichen, Absolutbetrag)
Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad a > 0 \\ 0, & \text{für} \quad a = 0 \\ -1, & \text{für} \quad a < 0. \end{cases}$$

das Vorzeichen oder Signum von a.
Der Absolutbetrag (kurz: Betrag, Schreibweise: $|a|$) von $a \in \mathbb{R}$ ist durch

$$|a| := \operatorname{sgn}(a) \cdot a = \begin{cases} a, & \text{für} \quad a \geq 0 \\ -a, & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

erklärt.

Satz 1.4.10. *(Eigenschaften des Absolutbetrages)*
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist

(i) $|a| \geq 0$ *und* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ *(Definitheit)*

(ii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ *(Multiplikativität)*

(iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweis. Wir beweisen nur (iii):
Es sei $\epsilon := \operatorname{sgn}(a + b)$. Wegen $a \leq |a|$ und $|\pm 1| = 1$ folgt

$$|a + b| = \epsilon(a + b) = \epsilon a + \epsilon b \leq |\epsilon a| + |\epsilon b| = |a| + |b|.$$

$\square$

Satz 1.4.11. *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Eigenschaften:*

(i) $a \leq |a|$

(ii) Für $a \neq 0$ *gilt* $a^2 = (-a)^2 = |a|^2 > 0$.

(iii) Für $a \neq 0$ *gilt* $|a^{-1}| = |a|^{-1}$.

(iv) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Beweis. ohne Beweis $\square$

Wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind die Intervalle.

Definition 1.4.4. (Intervalle)
Es seien $a \leq b \in \mathbb{R}$. Die folgenden Mengen heißen Intervalle:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}$$

und falls $a < b$

$$\begin{aligned} [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\} \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} |\ a < x \leq b\} \\ (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\} \end{aligned}$$

Dann heißt $[a, b]$ abgeschlossenes, auch kompaktes Intervall, (a, b) heißt offen und $[a, b)$ bzw. $(a, b]$ heißen halboffen. Die Eigenschaften abgeschlossen, kompakt und offen von Teilmengen von $\mathbb{R}$ werden später allgemein definiert werden.

Definition 1.4.5. (unendliche Intervalle)
Diese Intervalle werden mittels der Symbole ∞ und $-\infty$ (sprich: unendlich und minus unendlich) definiert. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir definieren:

$$\begin{aligned} [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x\} \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} |\ a < x\} \\ (-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} |\ x \leq b\} \\ (-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} |\ x < b\} \\ (-\infty, \infty) &:= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Definition 1.4.6. (Maximum, Minimum)
Es sei $X \subset \mathbb{R}$. Dann heißt m Minimum von X (Schreibweise: $\min X$), falls $m \in X$ und $m \leq x$ für alle $x \in X$ gilt, und M heißt Maximum von X (Schreibweise: $\max X$), falls $M \in X$ und $x \leq M$ für alle $x \in X$ ist.

Satz 1.4.12. *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) $|a| < c \Leftrightarrow a \in (-c, c)$

(ii) $|b - a| < c \Leftrightarrow b \in (a - c, a + c)$

Beweis. ohne Beweis □

1.5 Natürliche Zahlen, vollständige Induktion

Nun können wir die natürlichen Zahlen einführen, die wir bisher noch nicht kennen.

Definition 1.5.1. (i) Eine induktive Menge I reeller Zahlen ist eine Menge mit folgenden Eigenschaften:

(1) $1 \in I$
(2) $n \in I \Rightarrow n+1 \in I$

(ii) Die Menge der natürlichen Zahlen, bezeichnet als $\mathbb{N}$, ist der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Satz 1.5.1. *Es gilt:*

(i) $\mathbb{N} \neq \emptyset$, $\mathbb{N}$ *ist induktiv*

(ii) Jede induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$ *ist* $\mathbb{N}$.

(iii) $\min \mathbb{N} = 1$

(iv) Für $n \in \mathbb{N}$ *gibt es kein* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $n < m < n+1$.

(v) $n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow n+m \in \mathbb{N}$ *und* $n \cdot m \in \mathbb{N}$

(vi) Es seien $n \in \mathbb{N}$ *und* $m \in [1, \infty)$. *Dann ist* $n - m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow m \in \mathbb{N}$ *und* $m < n$.

Zur Vorbereitung des Beweises zeigen wir zunächst:

Lemma 1.5.1. *Der Durchschnitt einer beliebigen Menge induktiver Teilmengen von* $\mathbb{R}$ *ist induktiv.*

Beweis. Es sei J eine Menge von induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $M = \bigcap_{I \in J} I$. Dann ist

(1) $1 \in I$ für alle $I \in J \underset{Def.1.2.3(ii)}{\Rightarrow} 1 \in \bigcap_{I \in J} I = M$.

(2) $n \in M \underset{Def.1.2.3(ii)}{\Rightarrow} n \in I,\ \forall I \in J \underset{I\text{induktiv}}{\Rightarrow} n+1 \in I,\ \forall I \in J \underset{Def.1.2.3(ii)}{\Rightarrow} n+1 \in M$.

□

Beweis. (Beweis von Satz 1.5.1) Es sei J die Menge aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(i) Nach Lemma 1.5.1 ist $\mathbb{N}$ induktiv und damit $1 \in \mathbb{N}$, also $\mathbb{N} \neq \emptyset$.

(ii) Es sei M eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann gilt:

(1) $M \subset \mathbb{N}$. Nun ist $\mathbb{N} = \bigcap_{I \in J} I$, also $\mathbb{N} \subset I,\ \forall I \in J$. Da $M \subset J$ ist, folgt
(2) $\mathbb{N} \subset M$.

Also ist $\mathbb{N} = M$.

(iii) Wegen $1 \in [1, \infty)$ und $n \geq 1 \underset{(A3)}{\Rightarrow} n+1 \geq 1$ ist $[1, \infty)$ induktiv. Also ist $\mathbb{N} \subset [1, \infty) \Rightarrow n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Es sei

$$K := \{n \in \mathbb{N} | \ \nexists m \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad n < m < n+1\}.$$

Wir zeigen, daß K induktiv ist:
Es sei $M_1 := \mathbb{N}\backslash(1, 1+1)$. dann ist M_1 induktiv, also $M_1 = \mathbb{N}$. Es ist $\mathbb{N}_1(1, 1+1) = \emptyset$.
Damit ist $1 \in K$.
Nun sei $n \in K$:
Setze $M_{n+1} := \mathbb{N}\backslash(n+1, n+1+1)$. Wiederum ist M_{n+1} induktiv, da $1 \in M_{n+1}$ ist und aus $m \in M_{n+1}$ folgt, da $n \in K$ ist, $m \notin (n, n+1)$ ist. Also ist $m+1 \notin (n+1, n+1+1)$ und folglich $m+1 \in \mathbb{N}\backslash(n+1, n+1+1) = M_{n+1}$.
Damit ist $M_{n+1} = \mathbb{N}$. Also ist $\mathbb{N}_1(n+1, n+1+1) = \emptyset$ und $n+1 \in K$. Also ist $K = \mathbb{N}$.

(v) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge $L_n := \{m \in \mathbb{N} | \ n+m \in \mathbb{N}\}$. Diese Menge ist induktiv, denn $n \in L_n \underset{\mathbb{N} \in J}{\Rightarrow} n+1 \in \mathbb{N}$. Also ist $1 \in L_n$. Es sei $m \in L_n$, also $n+m \in \mathbb{N} \underset{\mathbb{N} \in J}{\Rightarrow} (n+m)+1 \underset{(K1)}{=} n+(m+1) \in L_n$. Also ist $m+1 \in L_n$. Damit ist $L_n = \mathbb{N}$.

Wir verzichten auf den Beweis des zweiten Teils und auf den Beweis von Teil (vi). $\square$

Bemerkung 1.5.1. Das Beweisverfahren in Satz 1.5.1, Teil (iv) und (v) ist der Beweis durch vollständige Induktion:
Es ist eine Aussage $A(n)$ zu beweisen, die von der natürlichen Zahl n abhängt. Eigentlich handelt es sich um eine Folge von Aussagen $A(n)$, wie zum Beispiel in (iv) die Aussage $A(n)$: Es gibt kein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \in (n, n+1)$. Man definiert die Menge W aller n, für die die Aussage $A(n)$ wahr ist und zeigt, daß diese Menge induktiv ist, d.h.

(i) $1 \in W$: $A(1)$ ist wahr

(ii) $n \in W \Rightarrow (n+1) \in W$: Wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Nach Satz 1.5.1 (ii) folgt dann: $W = \mathbb{N}$, d.h. $A(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.
Ein Beweis durch vollständige Induktion geht also nach folgendem Schema:

(i) $n = 1$: (Induktionsanfang): $A(1)$ ist wahr.

(ii) $n \to n+1$ (Induktionsschritt): Wenn $A(n)$ wahr ist (Induktionshypothese), dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Definition 1.5.2. (i) Mengen X und Y sind gleichmächtig (Schreibweise: $X \sim Y$), falls es eine injektive Abbildung $f: X \to Y$ und $g: Y \to X$ gibt.

(ii) Die Menge X heißt von kleinerer Mächtigkeit als die Menge Y (Schreibweise $X \prec Y$), falls es eine injektive Abbildung $f: X \to Y$, aber keine injektive Abbildung $g: Y \to X$ gibt.

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei der Abschnitt bis n (Schreibweise: $\mathbb{N}(n)$) durch $\mathbb{N}(n) := \{m \in \mathbb{N} |\ m \leq n\}$ definiert.

Eien Menge X heißt endlich, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $X \sim \mathbb{N}(n)$, andernfalls unendlich. Man nennt X abzählbar unendlich, falls $X \sim \mathbb{N}$ und abzählbar, falls X endlich oder abzählbar unendlich ist, andernfalls überabzählbar.

Satz 1.5.2. *Es seien X, Y, Z Mengen.*

(i) $X \sim Y \Leftrightarrow \exists f\colon X \to Y,\ f$ *bijektiv*

(ii) $X \prec Y$ *und* $Y \prec Z \Rightarrow X \prec Z$

(iii) $X \neq \emptyset$ *erfüllt genau eine der folgenden Möglichkeiten: X endlich, X abzählbar unenendlich, X überabzählbar*

(iv) Ist X endlich, so gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $X \sim \mathbb{N}(n)$.

Beweis. Übungen □

Definition 1.5.3.

$$2 := 1 + 1,\ 3 := 2 + 1,\ 4 := 3 + 1, \ldots, 9 := 8 + 1,\ 10 := 9 + 1, \ldots$$

Definition 1.5.4. Es sei X eine endliche Menge. Ist $n \in \mathbb{N}$ die nach Satz 1.5.2 eindeutig bestimmte natürliche Zahl mit $X \sim \mathbb{N}(n)$, so schreiben wir $|X| = n$ und sagen, X hat n Elemente.

Beispiel 1.5.1. Es sei $X = \{a, b, c\}$. Für $n \geq 3$ haben wir eine bijektive Abbildung $f\colon X \to \mathbb{N}(3) = \{1, 2, 3\}$ mit $f(a) := 1$, $f(b) := 2$ und $f(c) := 3$. Also ist $|X| = 3$, d.h. X hat drei Elemente.

Satz 1.5.3. *(i) Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum (Wohlordnungssatz).*

(ii) Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt Maximum und Minimum.

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 1.5.5. Wir setzen $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Die Mengen $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen sind durch $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n |\ n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathbb{Q} = \left\{\frac{r}{s} |\ r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\right\}$ definiert.

Man zeigt leicht:

Satz 1.5.4. *(i)* $(\mathbb{Z}, +)$ *ist eine kommutative Gruppe.*

(ii) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *ist ein Körper.*

Beweis. Durch Nachrechnen. □

Definition 1.5.6. Unter einer Folge a_n von Elementen einer Menge X verstehen wir eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to X,\ n \to a_n$ oder $f\colon \mathbb{N}_0 \to X,\ n \to a_n$. Dabei heißt a_n auch das n- te Glied der Folge und n heißt Folgenindex (kurz: Index). Statt n kann auch jedes andere Symbol verwendet werden. Unter einer endlichen Folge verstehen wir eine Abbildung $f\colon \mathbb{N}(n) \to X$. Wir betrachten meist den Fall $X = \mathbb{R}$, also Folgen reeller Zahlen. Künfig soll unter einer Folge stets eine Folge reeller Zahlen gemeint sein, falls nichts anderes vereinbart ist. Eine Folge kann durch eine Gleichung, z. B. $a_n = 5n+2$, beschrieben werden. Sie kann auch durch vollständige Induktion definiert werden.

Beispiel 1.5.2. (Folge der Fibonacci- Zahlen)
Es sei (a_n) durch

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für} \quad n \geq 2$$

gegeben. Die ersten Glieder der Folge berechnen sich zu

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= a_1 + a_0 = 1 + 1 = 2 \\ a_3 &= a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

Summen und Produkte einer beliebigen Anzahl von Gliedern einer Folge können induktiv definiert werden.

Definition 1.5.7. Es sei $(a_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge. Dann definieren wir die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ der n- ten Partialsummen induktiv durch

(i) $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1$$

(ii) $n \to n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{k+1}.$$

In $\sum_{k=1}^{n} a_k$ heißt k die Summationsvariable, 1 (bzw. n) die untere (bzw. obere) Summationsgrenze, und $\{m \in \mathbb{N} |\ 1 \leq m \leq n\}$ heißt auch Summationsintervall. Die Sprechweise ist: Summe $k = 0$ bis n, a_k. Für die Summationsvariable kann auch jedes andere Symbol benützt werden. Allgemeiner können auch Summen $\sum_{k=0}^{n} a_k$, falls $(a_n)\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, oder $\sum_{k=m}^{n} a_k$ induktiv definiert werden. Summen können auch für endliche Folgen definiert werden. Wir verzeichten auf die Einzelheiten der Definition.

Durch vollständige Induktion beweist man leicht:

Satz 1.5.5. *Es seien $a, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$

(ii) $\displaystyle a \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a a_k$

(iii) $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} < |a_k|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 1.5.8. Es sei $(a_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge. Dann definieren wir die Folge $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)$ der n- ten Partialprodukte induktiv durch

(i) $n = 1$:

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1$$

(ii) $n \to n+1$:

$$\prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{k+1}.$$

Es gelten die entsprechenden Bemerkungen wie bei der Definition der Partialsummen.

In Ausdrücken der Form $\sum_{k=1}^{n} a$ bzw. $\prod_{k=1}^{n} a$, bei denen der Folgenindex fehlt, werden die Partialsummen bzw. Partialprodukte von der konstanten Folge (a_k) mit $a_k = a$ für alle k gebildet. Der Fall der Partialprodukte führt zur Definition der Potenzen:

Definition 1.5.9. (n- te Potenzen)

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die n- te Potenz a^n (lies: a hoch n) durch $\prod_{k=1}^{n} a$ definiert. Es ist $a^0 = 1$ und für $a \neq 0$ sei $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

Satz 1.5.6. *(Potenzgesetze)*
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$. Dann gelten folgende Regeln (vorausgesetzt die Ausdrücke sind definiert):

(i) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

(ii) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 1.5.7. *(Monotonie, Definitheit)*
Es seien $a < b \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

(i) $a^n < b^n$, *falls* $n > 0$

(ii) $a^n > b^n$, *falls* $n < 0$

(iii) $a^2 \geq 0$ *und* $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0.$

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 1.5.10. (Fakultät und Binomialkoeffizient)
Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ (lies: n Fakultät) durch

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k$$

definiert. Weiter ist $0! := 1$.
Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (lies: n über k) ist für $k, n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$ durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

definiert.

Eine wichtige Technik im Rechnen mit Summenzeichen ist die Indexverschiebung. Bevor wir diese Technik in einem Satz formulieren, geben wir zwei Beispiele:

Beispiel 1.5.3. Es ist

$$\sum_{m=2}^{n} (m-2) = (2-2) + \ldots + (n-2).$$

Wir führen eine neue Summationsvariable ein: $k = m - 2$. Diese Substitution ist mit einer bijektiven Abbildung f des ursprünglichen Summationsintervalls $\{m \in \mathbb{N}| \ 2 \leq m \leq n\}$ auf das neue Summationsintervall $\{n \in \mathbb{N}| \ 0 \leq k \leq n-2\}$ verbunden. Damit ist

$$\sum_{m=2}^{n} (m-2) = (2-2) + \ldots + (n-2) = 0 + \ldots + (n-2) = \sum_{k=0}^{n-2} k.$$

Eine der bekanntesten Anwendungen ist die Summenformel für die endliche geometrische Reihe.

Beispiel 1.5.4. Es sei $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ und $N \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die endliche geometrische Reihe:

$$S := \sum_{n=0}^{N} q^n = 1 + q + \ldots + q^N.$$

Eine "skizzenhafte" Behandlung des Problems sieht wie folgt aus:
Differenzenbildung ergibt:

$$\begin{array}{rcllllll} S & = & 1 & +q & +\ldots & +q^N & \\ qS & = & & q & +\ldots & +q^N & +q^{N+1} \\ \Rightarrow (1-q)S & = & 1 & & & & -q^{N+1} \end{array}$$

Somit ergibt sich: $S = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$.

Die mathematisch strenge Behandlung sieht wie folgt aus: es ist

$$S = \sum_{n=0}^{N} q^n. \tag{1}$$

Nach dem Distributivgesetz (Satz 1.5.5 (ii)) ist $qS = \sum_{n=0}^{N} q \cdot q^N = \sum_{n=0}^{N} q^{N+1}$. Wir führen die neue Summationsvariable $m = n + 1$ ein und erhalten

$$qS = \sum_{m=1}^{N+1} q^m = \sum_{n=1}^{N+1} q^n \tag{2}$$

mit Zurückbenennung $m \to n$. Aus (1) und (2) erhalten wir

$$(1-q)S = \sum_{n=0}^{N} q^n - \sum_{n=1}^{N+1} q^n.$$

Die Summationsintervalle in beiden Summen sind $\{n \in \mathbb{N}|\ 0 \leq n \leq N\}$ bzw. $\{n \in \mathbb{N}|\ 1 \leq n \leq N+1\}$. Wir spalten die beiden Indizes, die nicht im Durchschnitt liegen, ab und erhalten

$$\begin{array}{rclll} \sum_{n=0}^{N} q^n & = & 1+ & \sum_{n=1}^{N} q^n & \\ \sum_{n=0}^{N+1} q^n & = & & \sum_{n=1}^{N} q^n & +q^{N+1} \end{array}$$

Differenzenbildung ergibt:

$$(1-q)S = 1 + \sum_{n=1}^{N}(q^n - q^n) - q^{N+1} = 1 - q^{N+1},$$

also

$$S = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Satz 1.5.8. *Es sei* (a_k) *eine Folge (oder eine endliche Folge). Es sei* $m, n \in \mathbb{N}_0$ *mit* $m \leq n$ *und* $p, q \in \mathbb{N}$. *Dann ist*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=m-q}^{n-q} a_{k+q}.$$

Beweis. ohne Beweis. □

Beispiel 1.5.5. Wir wollen $T_n := \sum_{m=1}^{n} m$ bestimmen. Wir betrachten $S_n := \sum_{m=1}^{n} m^2$ und berechnen die Differenzen $S_{n+1} - S_n$ auf zwei verschiedene Weisen:
Es ist

$$S_{n+1} = \sum_{m=1}^{n} m^2 + (n+1)^2 = S_n + (n+1)^2,$$

also

$$S_{n+1} - S_n = (n+1)^2. \tag{1}$$

Die Berechnung mittels Indexverschiebung lautet:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{m=1}^{n+1} m^2 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 = \sum_{m=0}^{n} (m+1)^2 = \sum_{m=0}^{n} (m^2 + 2m + 1) \\ &= \sum_{m=0}^{n} m^2 + 2\sum_{m=0}^{n} m + \sum_{m=0}^{n} 1 = S_n + 2T_n + n + 1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$S_{n+1} - S_n = 2T_n + n + 1. \tag{2}$$

Vergleich von (1) und (2) ergibt

$$(n+1)^2 = 2T_n + n + 1,$$

also

$$T_n = \sum_{m=1}^{n} m = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Die Behauptung $B(n)$ läßt sich auch durch vollständige Induktion beweisen:
Induktionsanfang $n = 1$:

$$\sum_{m=1}^{1} m = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1, \quad \text{also ist } B(1) \text{ wahr.}$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:
Sei die Induktionshypothese für ein n richtig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n+1} m &= \sum_{m=1}^{n} m + (n+1) = T_n + n + 1 \underset{(IH)}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2}n + 1\right) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

also ist $B(n)$ wahr.

Wir schließen mit Beispielen für Induktionsbeweise:

Satz 1.5.9. *(Bernoullische Ungleichung)*
Es sei $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. (Beweis durch vollständige Induktion)
Induktionsanfang $n = 1$:

$$(1+x)^1 = 1 + x.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:
Sei die Induktionshypothese für ein n richtig. Es gilt

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$$

nach Definition 1.5.8 und 1.5.9. Wegen $x > -1$ ist $(1+x) > 0$. Nach $(A3)$ (Monotonie) und der Induktionshypothese folgt:

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

nach Satz 1.5.7 (Definitheit). □

Als letztes wollen wir eine Regel über die Berechnung von $(a+b)^n$, den Binomischen Lehrsatz beweisen.
Zur Vorbereitung zeigen wir eine Beziehung zwischen Binomialkoeffizienten.

Lemma 1.5.2. *Es sei $k, n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n-1$. Dann ist*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Beweis. Nach Definition 1.5.10 ist

$$(k+1)! = k!(k+1) \quad \text{und} \quad (n-k)! = (n-k-1)!(n-k)$$

Nach Definition 1.5.10 und Satz 1.4.4 (Bruchrechnen) folgt:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)}+\frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!}\\ &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))!(k+1)!}\\ &= \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

□

Satz 1.5.10. *(Binomischer Lehrsatz)*
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang $n = 1$:

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= a^1+b^1\\ \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{1-k} &= \binom{1}{0}a^0b^1+\binom{1}{1}a^1b^0=a+b.\end{aligned}$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:
Sei die Induktionshypothese für ein n richtig. Es gilt

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &\underset{\text{Def. 1.5.9}}{=} (a+b)^n(a+b) \underset{(IH)}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}(a+b)\\ &\underset{\substack{\text{Satz 1.5.5}(ii)\\ \text{Def. 1.5.9}}}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}.\end{aligned}$$

Also ist

$$(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}. \tag{1}$$

Wir spalten von der ersten Summe den Term $k = n$ und von der zweiten Summe den Term $k = 0$ ab und führen eine Indexverschiebung durch. Wir erhalten

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{(n+1)-(k+1)}+a^{n+1} \tag{2}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{k+1} b^{(n+1)-(k+1)}. \tag{3}$$

Aus (1), (2), (3) und Lemma 1.5.2 erhalten wir

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) a^{k+1} b^{(n+1)-(k+1)} + a^{n+1} \\
&= b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} a^{k+1} b^{(n+1)-(k+1)} + a^{n+1} \\
&= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□

1.6 Die komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen sind kein eigentlicher Bestandteil dieser Vorlesung. Viele Begriffe aus der reellen Analysis, wie Grenzwerte, Stetigkeit, usw., lassen sich auf die komplexe Analysis übertragen. Wir werden dies gelegentlich in Hinweisen andeuten. Jedoch ist die komplexe Analysis ein eigenständiges Gebiet und besitzt viele Züge, die in der reellen Analysis keine Paralellen haben. Sie ist Gegenstand der Vorlesung Analysis IV.

Definition 1.6.1. Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist die Menge aller Paare reeller Zahlen:

$$\mathbb{C} := \{(x,y) |\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Addition und Multiplikation sind wie folgt definiert:

(i) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

(ii) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Diese Regeln werden durch folgende Definition übersichtlich:

Definition 1.6.2.

$$i = (0, 1).$$

Aus Definition 1.6.1 (i), (ii) ergibt sich dann die folgende Regel:

$$i^2 = (-1, 0).$$

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen kann nun durch eine leichte Änderung der Definition 1.6.1 zu einer Teilmenge der komplexen Zahlen gemacht werden.

Definition 1.6.3. Es sei $\tilde{\mathbb{C}} = (\{\mathbb{C} \backslash \{(x, 0) : \ x \in \mathbb{R}\}) \cup \mathbb{R}$.
(Wir "werfen die Elemente $(x, 0)$ hinaus" und ersetzen sie durch die reellen Zahlen x. Die Regel $i^2 = (-1, 0)$ wird zu $i^2 = -1$ und (x, y) kann als $(x, y) = x + iy$ geschrieben werden.)
Die Rechenregeln lassen sich wie folgt sehr leicht merken:
Es gelten die üblichen Regeln (Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze), und es ist $i^2 = -1$.

Beispiel 1.6.1. Es ist

$$(4 + 3i)(7 + 5i) = 4 \cdot 7 + 4 \cdot 5i + 7 \cdot 3i + (3i) \cdot (5i) = 28 + 15i^2 + (4 \cdot 5 + 7 \cdot 3)i \underset{i^2=-1}{=} 13 + 41i.$$

Satz 1.6.1. *Die Struktur* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist ein Körper mit der Null 0 und der Eins 1.*
Für $x + iy \neq 0$ *haben wir*

$$(x + iy)^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Kapitel 2

Folgen und Reihen

2.1 Folgen und Grenzwerte

Definition 2.1.1. (Grenzwert, Limes)
Eine Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge (a_n), (Schreibweise: $\lim a_n = a$, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$), wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \quad \text{so daß} \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{gilt} \quad |a_n - a| < \epsilon \; \forall n \geq n_0.$$

Man sagt dann auch:
Die Folge (a_n) konvergiert gegen a oder (a_n) ist eine konvergente Folge.
Hat (a_n) keinen Grenzwert, so heißt (a_n) divergent oder (a_n) divergiert.

Definition 2.1.2. Es sei $\epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Unter der ϵ- Umgebung $U_\epsilon(a)$ versteht man

$$U_\epsilon(a) := \{x | \; |x - a| < \epsilon\}.$$

Man sagt: Eine Eigenschaft gilt für fast alle Elemente einer Menge bzw. Glieder einer Folge, falls es höchstens endlich viele Elemente der Menge bzw. Glieder der Folge gibt, für die sie nicht gilt.

Bemerkung 2.1.1. Die Eigenschaft der Konvergenz läßt sich auch so ausdrücken:
Man nennt a den Grenzwert von (a_n), wenn in jeder ϵ- Umgebung $U_\epsilon(a)$ fast alle Glieder der Folge (a_n) liegen.

Satz 2.1.1. *Eine Folge (a_n) hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Annahme:
Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ mit $a < b$. Wir setzen $\epsilon := 1/2(b - a)$. Es ist also

$$b - a = 2\epsilon \tag{1}$$

Nach Definition 2.1.1 gibt es ein $n_0 = n_0(\epsilon)$, so daß für $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \epsilon \tag{2}$$

und ein $n_1 = n_1(\epsilon)$, so daß für $n \geq n_1$ gilt:

$$|b - a_n| < \epsilon. \tag{3}$$

Es sei $n \geq \max\{n_0, n_1\}$. Aus (2) und (3) folgt nach der Dreiecksungleichung (Satz 1.4.10 (iii)):

$$|b - a| < |(b - a_n) + (a_n - a)| < |b - a_n| + |a - a_n| < 2\epsilon$$

im Widerspruch zu (1). □

Satz 2.1.2. *(Grenzwerte von konstanten Folgen)*
Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

Beweis. Wir setzen $c_n := c$ für alle n. Dann ist $|c_n - c| = 0 < \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$ und für alle n. □

Definition 2.1.3. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ für eine Folge (a_n), so heißt (a_n) eine Nullfolge.

Satz 2.1.3. *Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ist eine Nullfolge, d.h. es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.*

Beweis. Nach dem Vollständigkeitsaxiom (V) besitzt die Menge $X = \left\{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ ein Supremum S. Wegen $-\frac{1}{n} < 0$ für alle n ist 0 eine obere Schranke von $\left(-\frac{1}{n}\right)$, also ist $S \leq 0$.
Annahme: $S < 0$
Nach der Definition des Supremums existiert ein n mit $-\frac{1}{n} > \frac{4}{3}S$. Dann ist aber $-\frac{1}{2n} > \frac{2}{3}S > S$, ein Widerspruch.
Damit ist $\sup\left\{\left(-\frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\} = 0$, d.h. $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\epsilon)$ mit $-\frac{1}{n_0} > -\epsilon$ und somit $0 < \frac{1}{n_0} < \epsilon$. Wegen $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ für $n \geq n_0$ folgt

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0(\epsilon).$$

Nach Definition 2.1.1 ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. □

Definition 2.1.4. (Beschränktheit)
Eine Folge (a_n) heißt nach oben beschränkt, wenn $\exists A \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq A\ \forall n \in \mathbb{N}$, bzw. nach unten beschränkt, wenn $\exists B \in \mathbb{R}$ mit $a_n \geq B\ \forall n \in \mathbb{N}$. Man nennt (a_n) beschränkt, falls es nach oben und nach unten beschränkt ist.

Satz 2.1.4. *(i) Die Folge $(n)_{n=1}^{\infty}$ ist nach oben unbeschränkt.*

(ii) Eien Folge (a_n) *ist genau dann beschränkt, wenn* $\exists S \in \mathbb{R}$*, so daß* $|a_n| \le S \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. (i) Annahme:
Die Folge (n) ist beschränkt, d.h. es gibt ein $S \in \mathbb{R}$ mit $n \le S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $\frac{1}{n} \ge S^{-1} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Satz 2.1.3).

(ii) Nach Definition 2.1.3 ist (a_n) genau dann beschränkt, wenn $A, B \in \mathbb{R}$ mit

$$B \le a_n \le A \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

existieren. Setze $S := \max\{|A|, |B|\}$. Aus (1) folgt

$$|a_n| \le S \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Umgekehrt folgt aus (2) mit $S > 0$, daß $-S \le a_n \le S$, also die Beschränktheit von (a_n).

□

Satz 2.1.5. *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Nach Definition 2.1.1 mit $\epsilon = 1$ existiert ein $n_0 = n_0(1)$, so daß

$$|a_n - a| < 1 \quad \text{für} \quad n \ge n_0. \tag{1}$$

Aus (1) folgt

$$|a_n| \le |a| + 1. \tag{2}$$

Nach Satz 1.5.3 (*ii*) existiert $M := \max\{|a_n|,\ n < n_0\} \cup \{|a|+1\}$. Aus (2) folgt dann: $|a_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Es ist oft einfacher, Beweise über die Konvergenz von Folgen zu führen, indem man nicht direkt auf die Definition 2.1.1 zurückgeht, sondern den folgenden Satz verwendet:

Satz 2.1.6. *Für die Folge* (a_n) *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(ii) $\exists C > 0$*, so daß* $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\epsilon)$ *mit* $|a_n - a| < C\epsilon \ \forall n \ge n_0(\epsilon)$.

Beweis. "$\Rightarrow$":
Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach Definition 2.1.1 gibt es für alle $\epsilon' > 0$ ein $n_0 = n_0(\epsilon')$, so daß $|a_n - a| < \epsilon'$ für alle $n \ge n_0(\epsilon')$ ist. Dies gilt insbesondere auch für $\epsilon' = C\epsilon$. Es gilt also $|a_n - a| < \epsilon' = C\epsilon$ für $n \ge n_0(\epsilon')$.
"$\Leftarrow$":
Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $\epsilon' = C^{-1}\epsilon$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $n_0 = n_0(\epsilon')$, so daß $|a_n - a| < C\epsilon' = \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$ ist. Nach Definition 2.1.1 ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

Satz 2.1.7. *(Grenzwertsätze)*
Es seien (a_n) und (b_n) Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann ist

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = ab$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, *falls* $b \neq 0$.

Beweis. (i) Es sei $\epsilon > 0$. Nach Definition 2.1.1 gibt es $n_0 = n_0(\epsilon)$ und $n_1 = n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0(\epsilon)$ und $|b_n - b| < \epsilon$ für alle $n \geq n_1(\epsilon)$. Es sei $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$. Dann ist für $n \geq n_0$ nach der Dreiecksungleichung (Satz 1.4.10 *(ii)*) dann $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| < |a_n - a| + |b_n - b| < 2\epsilon$. Nach Satz 2.1.3 folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

(ii) Nach Satz 2.1.5 ist die Folge (b_n) beschränkt, d.h. $\exists B \in \mathbb{R}$ mit

$$|b_n| \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Es sei $\epsilon > 0$. Nach Definition 2.1.1 existiert ein $n_0 = n_0(\epsilon)$ und $n_1 = n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0, \tag{2}$$

$$|b_n - b| < \epsilon \quad \forall n \geq n_1. \tag{3}$$

Es sei $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$. Dann ist für alle $n \geq n_2$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\underset{\Delta-\text{Ugl.}}{\leq} |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \\ &\underset{(1),(2),(3)}{<} (B + |a|)\epsilon. \end{aligned}$$

(iii) Nach Definition 2.1.1 gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|b_n - b| \leq 1/2|b|$ für alle $n \geq n_0$ ist, und damit gilt nach Satz 1.4.11 *(iv)*

$$|b_n - b| \geq \frac{1}{2}|b| \quad \forall n \geq n_0. \tag{1}$$

Nach Definition 2.1.1 gibt es $n_1 = n_1(\epsilon)$ bzw. $n_2 = n_2(\epsilon)$, so daß für alle $n \geq n_1(\epsilon)$ bzw. für alle $n \geq n_2(\epsilon)$ gilt, daß $|a_n - a| < \epsilon$ bzw. $|b_n - b| < \epsilon$. Wir setzen $n_3 := \max\{n_1, n_2\}$ und erhalten

$$|a_n - a| < \epsilon, \quad |b_n - b| < \epsilon \quad \forall n \geq n_3. \tag{2}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \frac{1}{|bb_n|}|a_n b - ab_n| = \frac{1}{|bb_n|}|a_n b - ab + ab - ab_n| \\ &\underset{\Delta-\text{Ugl.}}{\leq} \frac{1}{|bb_n|}\left(|b||a_n - a| + |a||b_n - b|\right) \\ &\underset{(1),(2)}{\leq} \frac{2}{|b|^2}\left(|a| + |b|\right)\epsilon.\end{aligned}$$

□

Satz 2.1.8. *(Erhaltung von Ungleichungen)*
Es seien (a_n) und (b_n) Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ sowie $a_n \leq b_n$ für alle n. Dann ist $a \leq b$, also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Beweis. Annahme: $a > b$
Wir setzen

$$2\epsilon := a - b. \tag{1}$$

Nach Definition 2.1.1 existiert $n_0 = n_0(\epsilon)$, so daß für alle $n \geq n_0(\epsilon)$ gilt:

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \epsilon. \tag{2}$$

Aus (2) folgt

$$a_n > a - \epsilon \quad \text{und} \quad b_n < b + \epsilon \quad \forall n \geq n_0. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt $b_n < a_n$ für alle $n \geq n_0$, ein Widerspruch. Nach Axiom $(A1)$ (Trichotomiegesetz) folgt $a \leq b$. □

Bemerkung 2.1.2. Aus der scharfen Ungleichung $a < b$ kann nicht $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ gefolgert werden, sondern auch nur $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Die sieht man am Beispiel $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$. Es ist $a_n < b_n$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Satz 2.1.9. *Es sei $q \in \mathbb{R}$ und $|q| < 1$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.*

Beweis. Fall 1: $q = 0$
Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

Fall 2:
Es sei $Q := |q|^{-1}$. Dann ist $Q = 1 + \eta$ mit $\eta > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung (Satz 1.5.9) ist $Q^n = (1+\eta)^n \geq 1 + n\eta$. Also ist $|q|^n = Q^{-n} \leq (1+n\eta)^{-1} \leq \eta^{-1}n^{-1}$ und damit $-\eta^{-1}n^{-1} \leq q^n \leq \eta^{-1}n^{-1}$. Nach den Sätzen 2.1.4, 2.1.7 und 2.1.8 ist

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(-\eta^{-1}n^{-1}\right) \leq \lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \eta^{-1}n^{-1} = 0,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. □

Beispiel 2.1.1. Es sei $a_n = 1 + \frac{1}{n} + 10^{-6}(-1)^n$.
Wir untersuchen, ob das Konvergenzkriterium von Definition 2.1.1 für $a = 1$ erfüllt ist.

Fall 1:
Es sei $\epsilon > 10^{-6}$. Dann können wir schreiben: $\epsilon = 10^{-6} + \eta_1$ mit $\eta_1 > 0$. Wir wählen $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $n_0 > \eta_1^{-1}$ ist. Für $n \geq n_0$ haben wir dann

$$|a_n - 1| = \left| \frac{1}{n} + 10^{-6}(-1)^n \right| < 10^{-6} + \eta_1 = \epsilon.$$

Fall 2:
Es sei $\epsilon \leq 10^{-6}$, z.B. $\epsilon = 10^{-6} - \eta_2$ mit $\eta_2 > 0$. Wir wählen $n_1 = n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $n_1 > \eta_2^{-1}$.
Für $n \geq n_1$ haben wir dann

$$|a_n - 1| = \left| \frac{1}{n} + 10^{-6}(-1)^n \right| > 10^{-6} - \eta_2 = \epsilon.$$

Damit ist das Kriterium von Definition 2.1.1 mit $a = 1$ zwar im Fall $\epsilon > 10^{-6}$ erfüllt, aber nicht im Falle $\epsilon \leq 10^{-6}$. Somit konvergiert a_n nicht gegen 1.

Es gibt auch keinen anderen Grenzwert a.
Es sei $a \in \mathbb{R}$. Nach der Dreieicksungleichung ist

$$2 \cdot 10^{-6} = \left|\left(1 + 10^{-6} - a\right) - \left(1 - 10^{-6} - a\right)\right| \leq \left|1 + 10^{-6} - a\right| + \left|1 - 10^{-6} - a\right|.$$

Daraus folgt: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt einer der folgenden Fälle:

Fall a: $\left|a - \left(1 + 10^{-6}\right)\right| > 10^{-6}$ oder
Fall b: $\left|a - \left(1 - 10^{-6}\right)\right| > 10^{-6}$.

Wir zeigen, daß in Fall a) die Zahl a nicht der Grenzwert von (a_n) sein kann. Fall b) wird analog behandelt.
Es sei $n \geq 2 \cdot 10^6$. Dann ist für alle geraden n folglich $|a_n - a| \geq 10^{-6} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$.
Für $\epsilon = 10^{-6}$ ist das Kriterium von Definition 2.1.1 nicht erfüllt: es gibt kein $n_0(\epsilon)$, so daß für $n \geq n_0(\epsilon)$ dann $|a_n - a| < \epsilon$ gilt. Also ist a nicht Grenzwert von (a_n).

Es gibt jedoch Zahlen, nämlich $l_1 = 1 - 10^{-6}$ und $l_2 = 1 + 10^{-6}$, die schwächere Eigenschaften als das Konvergenzkriterium erfüllen. In beliebigen ϵ- Umgebungen $U_\epsilon(l_1)$ bzw. $U_\epsilon(l_2)$ liegen zwar nicht fast alle Glieder der Folge (a_n), aber doch unendlich viele. Die Zahlen l_1, l_2 sind Beispiele von Häufungswerten.

Definition 2.1.5. Es sei (a_n) eine Folge. Dann heißt a Häufungswert (HW) von (a_n), falls es für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U_\epsilon(a)$ gibt.

Satz 2.1.10. *Es sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist a genau dann Häufungswert von (a_n), wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ von (a_n) mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ gibt.*

Beweis. "$\Rightarrow$":
Es sei a Häufungswert von (a_n). Wir definieren durch vollständige Induktion eine Folge (n_k) mit $n_k \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$, so daß $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$:
$k = 1$:
Nach Definition 2.1.5 gibt es ein n_1 mit $|a_{n_1} - a| < \frac{1}{k}$.
$k \to k+1$:
Es sei n_k schon definiert und $|\,|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$. Nach Definition 2.1.5 gibt es $n_{k+1} > n_k$ mit $\left|a_{n_{k+1}} - a\right| < \frac{1}{k+1}$. Nach Definition 2.1.1 ist $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.

"$\Leftarrow$":
Es sei $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$. Es sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es nach Definition 2.1.1 ein $k_0 = k_0(\epsilon)$, so daß $|a_{n_k} - a| < \epsilon$ für ∞- viele k. □

Beispiel 2.1.2. Es sei $a_n = 1 + \frac{1}{n} + 10^{-6}(-1)^n$ wie in Beispiel 2.1.1. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} a_{2k} &= 1 + 10^{-6} = l_2 \quad \text{und} \\ \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} &= 1 - 10^{-6} = l_1. \end{aligned}$$

Definition 2.1.6. (Infimum, Supremum)
Es sei $X \subset \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}$. Dann heißt u untere Schranke von X, falls $u \le x$ für alle $x \in X$ gilt. Falls eine untere Schranke von X existiert, heißt X nach unten beschränkt. Man nennt u größte untere Schranke oder Infimum von X (Schreibweise: $\inf X$), falls u eine untere Schranke von X ist und für alle unteren Schranken t von X gilt, daß $t \le u$ ist. Man nennt X beschränkt, falls X nach oben und unten beschränkt ist. Für das Supremum von X (Definition 1.3.5) schreiben wir $\sup X$.

Satz 2.1.11. *(Existenz von Infimum und Supremum)*

(i) Eine nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen hat stets ein Supremum.

(ii) Eine nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen hat stets ein Infimum.

Beweis. (i) Dies ist das Vollständigkeitsaxiom (V).

(ii) Man betrachte die Menge $-X := \{-x|\; x \in X\}$. Dann gilt: s ist untere Schranke von X $\Leftrightarrow$ $-s$ ist obere Schranke von $-X$. Also ist $\inf X = \sup(-X)$, und $\sup(-X)$ existiert nach (i).

□

Definition 2.1.7. (Monotonie)
Die Folge (a_n) heißt monoton wachsend (bzw. monoton fallend), wenn $a_{n+1} \ge a_n$ für alle

n (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n) gilt. Gilt die scharfe Ungleichung $a_{n+1} > a_n$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$), so heißt (a_n) streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend). Eine Folge heißt monoton, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und (a_n) monoton wachsend (bzw. fallend), so schreiben wir auch $a_n \uparrow a$ (bzw. $a_n \downarrow a$).

Satz 2.1.12. *(Monotoniekriterium)*
Eine beschränkte monotone Folge ist konvergent.

Beweis. Fall 1: (a_n) ist monoton wachsend:
Nach Satz 2.1.11 hat $X := \{a_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ ein Supremum s. Es sei $\epsilon > 0$. Nach der Definition des Supremums gibt es ein $n_0 = n_0(\epsilon)$, so daß $a_{n_0} \geq s - \epsilon$. Wegen der Monotonie ist dann $s - \epsilon \leq a_n \leq s$ für alle $n \geq n_0$. Nach Definition 2.1.1 folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.
Fall 2: (a_n) ist monoton fallend:
Dann ist $(-a_n)$ monoton wachsend, und es ist $\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty}(-a_n)$. □

Definition 2.1.8. Unter der Länge eines Intervalls $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ (Schreibweise: $|I|$), versteht man $|I| = b - a$.

Definition 2.1.9. (Intervallschachtelung)
Eine Folge (I_n) von kompakten Intervallen heißt Intervallschachtelung, wenn

(i) $I_{n+1} \subset I_n$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$.

Satz 2.1.13. *Es sei (I_n) eine Intervallschachtelung, und $I_n = [a_n, b_n]$. Dann existiert genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \uparrow a$ und $b_n \downarrow a$ mit $n \to \infty$.*

Beweis. Es sei $I_n = [a_n, b_n]$. Dann ist die Folge (a_n) monoton wachsend und die Folge (b_n) monoton fallend. Also ist $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit ist (a_n) beschränkt. Nach Satz 2.1.12 ist (a_n) konvergent, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ für $a \in \mathbb{R}$. Wegen $a_{n_0} \leq a_n$ für alle $n \geq n_0$ folgt nach Satz 2.1.8, daß $a_{n_0} = \lim_{n\to\infty} a_{n_0} \leq \lim_{n\to\infty} a_n = a$ ist, also ist $a_{n_0} \leq a$ für alle n_0. Analog zeigt man, daß die Folge b_n konvergiert. Es sei $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann ist $b \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $0 \leq b - a \leq b_n - a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$ folgt $b - a = 0$ und daraus $a = b$. □

Satz 2.1.14. *(Bolzano- Weierstraß)*
Eine beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis. Es sei
$$s \leq c_n \leq t \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad s, t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
Wir zeigen durch vollständige Induktion, daß eine Intervallschachtelung (I_m) mit $|I_m| = (t - s) \cdot 2^{-m}$ und $c_n \in I_m$ für unendlich viele n existiert:
$m = 0$:
Wir setzen $I_0 := [s, t]$. Wegen (1) gilt $c_n \in I_0$ für alle n.

$\underline{m \to m+1:}$
Es sei $|I_m| = (t-s)\cdot 2^{-m}$, $I_m = [a_m, b_m]$ und $c_n \in I_m$ für unendlich viele n. Dann ist $I_m = I_{m,1} \cup I_{m,2}$ mit $I_{m,1} = \left[a_m, \frac{a_m+b_m}{2}\right]$ und $I_{m,2} = \left[\frac{a_m+b_m}{2}, b_m\right]$. Für mindestens ein $j \in \{1,2\}$ ist $a_n \in I_{m,j}$ für unendlich viele n. Wir setzen $I_{m+1} := I_{m,j}$. Es ist $|I_{m+1}| = \frac{1}{2}|I_m| = (t-s)\cdot 2^{-(m+1)}$. Nach Satz 2.1.9 ist $|I_m| \to 0$ für $m \to \infty$. Nach Satz 2.1.13 gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \uparrow a$ und $b_m \downarrow a$.
Es sei $\epsilon > 0$. Wegen $|I_m| \to 0$ für $m \to \infty$ existiert ein m mit $|I_m| < \epsilon$. Für die unendlich vielen n mit $c_n \in I_m$ gilt: $a_m < c_n < b_m$. Es folgt $|c_n - a| < \epsilon$. Damit ist a Häufungswert von (c_n). □

Definition 2.1.10. Eine Folge (a_n) heißt <u>Cauchyfolge</u>, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\epsilon)$ existiert, so daß für alle Paare $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ mit $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ gilt, daß $|a_m - a_n| < \epsilon$.

Satz 2.1.15. *(Cauchykriterium)*
Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Beweis. "$\Rightarrow$":
Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Es sei $\epsilon > 0$. Nach Definition 2.1.1 existiert ein $n_0 = n_0(\epsilon/2)$, so daß $|a_n - a| < \epsilon/2$ für alle $n \geq n_0$ ist. Es sei $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Aus $|a_m - a| < \epsilon/2$ und $|a_n - a| < \epsilon/2$ folgt

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) - (a_n - a)| \underset{\Delta-Ugl.}{\leq} |a_m - a| + |a_n - a| < \epsilon.$$

Damit ist (a_n) eine Cauchyfolge.
"$\Leftarrow$":
Es sei (a_n) eine Cauchyfolge.
Wenn wir in Definition 2.1.10 $\epsilon = 1$ setzen, erhalten wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|a_m - a_n| < 1$ für alle (m,n) mit $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ ist. Es sei $M := \max\{a_n |\ n \leq n_0\}$. Dann ist für $n \geq n_0$ gerade $|a_n| \leq |a_{n_0}| + 1$. Also ist $|a_n| \leq \max\{M, |a_{n_0}| + 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit ist (a_n) beschränkt. Nach Satz 2.1.14 (Bolzano- Weierstraß) hat (a_n) einen Häufungswert a.
Es sei $\epsilon > 0$. Da (a_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es $n_0 = n_0(\epsilon)$, so daß für $m, n \geq n_0(\epsilon)$ gilt

$$|a_m - a_n| < \epsilon. \tag{1}$$

Da a Häufungswert von (a_n) ist, gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq n_0$, mit

$$|a_{m_0} - a| < \epsilon. \tag{2}$$

Da (1) auch für $m = m_0$ gilt, ist

$$|a_{m_0} - a_n| < \epsilon \tag{3}$$

für alle $n \geq n_0$. Aus (2) und (3) folgt

$$|a - a_n| < |a - a_{m_0} + a_{m_0} - a_n| \underset{\Delta-Ugl.}{\leq} |a - a_{m_0}| + |a_{m_0} - a_n| < 2\epsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Nach Satz 2.1.6 ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □

Satz 2.1.16. *Die Menge H der Häufungspunkte einer beschränkten Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei s eine obere Schranke der Folge (a_n), d.h. $a_n \leq s$ für alle n. Weiter sei $a = s+\epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Dann ist $a_n \notin U_\epsilon(a)$ für alle n. Also ist a kein Häufungswert von (a_n). Für jeden Häufungswert a von (a_n) gilt also $a \leq s$.
Analog zeigt man: $a \geq u$ für jede untere Schranke u von (a_n). □

Definition 2.1.11. Es sei (a_n) eine beschränkte Folge und H die Menge aller Häufungswerte von (a_n). Dann definiert man

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n &= \limsup_{n\to\infty} a_n := \sup H \quad \text{und} \\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n &= \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf H \end{aligned}$$

(Sprich: Limes Superior und Limes Inferior).

Satz 2.1.17. *Für eine beschränkte Folge (a_n) existieren stets $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und sind eindeutig bestimmt.*
Insbesondere sind $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ der größte bzw. der kleinste Häufungswert von (a_n).

Beweis. Die Existenz folgt aus Satz 2.1.16 und die Eindeutigkeit aus der Eindeutigkeit des Supremums und des Infimums.
Es sei H die Menge der Häufungswerte von (a_n) und $l := \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, also nach Definition 2.1.11 ist $l = \sup H$. Es sei $\epsilon > 0$. Da l nach Definition 1.3.5 die kleinste obere Schranke von H ist, gibt es einen Häufungswert w von (a_n) mit $l - \epsilon/2 < w \leq l$. Nach Definition 2.1.5 gibt es unendlich viele n, so daß $a_n \in U_{\epsilon/2}(w)$. Für diese n gilt

$$|a_n - l| \leq |(a_n - w) + (w - l)| \underset{\Delta-Ugl.}{\leq} |a_n - w| + |w - l| < \epsilon.$$

Also ist $a_n \in U_\epsilon(l)$.Damit ist $l \in H$, also ist $l = \max H$.
Analog zeigt man, daß $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \in H$. □

Satz 2.1.18. *Es sei (a_n) eine beschränkte Folge und $l \in \mathbb{R}$.*

(i) Es ist genau dann $l = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, wenn es für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele n mit $a_n > l-\epsilon$, aber höchstens endlich viele n mit $a_n > l + \epsilon$ gibt. $(*)$

(ii) Es ist genau dann $l = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, wenn es für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele n mit $a_n < l+\epsilon$, aber höchstens endlich viele n mit $a_n < l - \epsilon$ gibt.

Beweis. Wir zeigen nur (i).
"$\Rightarrow$":
Es sei $l = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\epsilon > 0$. Nach Satz 2.1.17 ist l ein Häufungswert von (a_n). Nach Definition 2.1.5 gibt es unendlich viele n mit $a_n \in U_\epsilon(l) = (l-\epsilon, l+\epsilon)$. Für diese n gilt insbesondere $a_n > l - \epsilon$.
<u>Annahme:</u> es existieren unendlich viele n mit $a_n > l + \epsilon$.
Es sei $X = \{n|\ a_n > l+\epsilon\}$. Dann ist X eine unendliche Menge. Es sei $X = \{n_k|\ k \in \mathbb{N}\}$ mit $n_k < n_{k+1}$. Dann ist $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ eine unendliche beschränkte Teilfolge von (a_n). Diese hat nach Satz 2.1.14 (Bolzano- Weierstraß) einen Häufungswert l'. Wäre $l' \le l$, so gäbe es keine n_k mit $a_{n_k} \in U_\epsilon(l')$ im Widerspruch zur Definition von l' als Häufungswert von (a_{n_k}). Also muß $l' > l$ sein, was im Widerspruch zur Tatsache, daß l der größte Häufungswert von (a_n) ist, steht. Damit gilt $(*)$.

"$\Leftarrow$":
Wir nehmen die Gültigkeit von $(*)$ an. Dann ist l ein Häufungswert von (a_n). Es sei $l' = l + 2\epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Dann gibt es höchstens endlich viele n mit $a_n \in U_\epsilon(l')$. Also ist l' kein Häufungswert. □

Bemerkung 2.1.3. Für $l = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ gibt es nach Satz 2.1.18 höchstens endlich viele n mit $a_n > l + \epsilon$. Es kann jedoch unendlich viele n mit $a_n > l$ geben, wie das Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$ und $l = 0$ zeigt.

Satz 2.1.19. *Es sei (a_n) eine beschränkte Folge. Die Folge ist genau dann konvergent, wenn sie nur einen einzigen Häufungswert besitzt.*
In diesem Fall ist dann
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis. "$\Leftarrow$":
Es sei $H = \{l\}$ mit $l \in \mathbb{R}$. Dann ist $\inf H = \sup H = l$, also
$$l = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Es sei $\epsilon > 0$. Nach Satz 2.1.18 gibt es höchstens endlich viele n mit $a_n > l+\epsilon$ (Teil (i)) und höchstens endlich viele n mit $a_n < l - \epsilon$ (Teil (ii)). Also gilt für <u>fast alle n</u>:
$$a_n \in (l-\epsilon, l+\epsilon) = U_\epsilon(l).$$

Nach Definition 2.1.1 bedeutet dies $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

"$\Rightarrow$":
Es sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann ist nach Satz 2.1.18 sowohl $a = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, als auch $a = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Damit ist $H = \{a\}$. □

Man kann nun die in diesem Abschnitt definierten Konzepte noch erweitern, indem man die Menge $\mathbb{R}$ zur Menge $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit den neuen Elementen ∞ (unendlich) und

$-\infty$ (minus unendlich) erweitert. Diese Objekte ∞ und $-\infty$ können dann als uneigentliche Grenzwerte, Häufungswerte, etc. auftreten.

Definition 2.1.12. (Umgebungen von ∞ und $-\infty$)
Es sei $c \in \mathbb{R}$. Unter der c- Umgebung von ∞ ($U_c(\infty)$) bzw. der c- Umgebung von $-\infty$ ($U_c(-\infty)$) versteht man

$$\begin{aligned} U_c(\infty) &:= (c,\infty) = \{x|\ x > c\} \quad \text{bzw.} \\ U_c(-\infty) &:= (-\infty, c) = \{x|\ x < c\}. \end{aligned}$$

Definition 2.1.13. Es sei (a_n) eine Folge. Man sagt, (a_n) divergiert gegen ∞ bzw. gegen $-\infty$ (Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $a_n \to \infty$ für $n \to \infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $a_n \to -\infty$ für $n \to \infty$), wenn für alle $c > 0$ für fast alle n gilt, daß $a_n \in U_c(\infty)$ bzw. $a_n \in U_c(-\infty)$ ist.
Dann heißen ∞ bzw. $-\infty$ uneigentlicher Grenzwert von (a_n).

Beispiel 2.1.3. Nach Satz 2.1.4 ist $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, $n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Definition 2.1.14. Man nennt ∞ bzw. $-\infty$ uneigentliche Häufungswerte der Folge (a_n), wenn für alle $c > 0$ es unendlich viele n mit $a_n \in U_c(\infty)$ bzw. $a_n \in U_c(-\infty)$ gibt.

Definition 2.1.15. Es sei $X \subset \mathbb{R}$ nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkt. Dann schreiben wir $\sup X = \infty$ (bzw. $\inf X = -\infty$).

Definition 2.1.16. Es sei (a_n) eine Folge , H die Menge der eigentlichen und uneigentlichen Häufungswerte von (a_n). Dann setzen wir

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup H \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf H.$$

2.2 Die n- te Wurzel

Satz 2.2.1. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,\infty)$. Dann gibt es genau ein $y \geq 0$, so daß $y^n = x$ ist.*

Beweis. Es sei $W := \{z|\ z \in [0,\infty), z^n \leq x\}$. Nach der Bernoullischen Ungleichung (Satz 1.5.9) ist für $z \geq 1 + \frac{x}{n}$:

$$z^n \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = x + 1 > x.$$

Damit ist W beschränkt und nach Satz 2.1.11 existiert $y_0 := \sup W$.

Wir zeigen im folgenden: $y_0^n = x$.
Annahme: $y_0^n < x$:
Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß $x = y_0^n + \delta$. Wir setzen

$$\begin{aligned} M &:= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} y_0^k, \\ \epsilon &:= \min\left\{\frac{1}{2}\delta M^{-1}, 1\right\} \quad \text{und} \\ z &:= y_0 + \epsilon. \end{aligned}$$

Wegen $\epsilon \leq 1$ ist $\epsilon^m \leq \epsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach dem Binomischen Lehrsatz (Satz 1.5.10) ist dann

$$z^n = (y_0 + \epsilon)^n = y_0^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} y_0^k \epsilon^{n-k} \leq y_0^n + M\epsilon \leq y_0^n + \frac{1}{2}\delta < x.$$

Damit ist $z \in W$ mit $z > y_0$, ein Widerspruch.

Annahme: $y_0^n > x$:
Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $x = y_0^n(1-\delta)$. Es sei $\epsilon := \min\left\{\frac{1}{2}n^{-1}\delta, \frac{1}{2}\right\}$ und $z = y_0(1-\delta)$. Nach der Bernoullischen Ungleichung ist

$$z^n = y_0^n(1-\epsilon)^n \geq y_0^n(1-n\epsilon) > x.$$

Damit ist z eine obere Schranke von W mit $z < y_0$, ein Widerspruch.
Es ist also $y_0^n = x$.
Weiter ist

$$\begin{aligned} 0 < z < y_0 &\Rightarrow z^n < y_0^n = x \\ z > y_0 &\Rightarrow z^n > y_0^n = x. \end{aligned}$$

Also ist

$$y^n = x, y \geq 0 \Leftrightarrow y = y_0.$$

□

2.3 Unendliche Reihen

Definition 2.3.1. Es sei (a_n) eine Zahlenfolge. Unter der unendlichen Reihe (kurz: Reihe) $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ (sprich: Summe $m = 1$ bis unendlich a_m) versteht man die Folge $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ der Partialsummen $S_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$. Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ heißt konvergent, falls

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} a_m =: S$$

existiert. Man schreibt dann $\sum_{m=1}^{\infty} a_m = s$ und nennt S den Wert der unendlichen Reihe. Ist $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ nicht konvergent, so heißt es divergent.

Bemerkung 2.3.1. Man kann allgemeiner auch unendliche Reihen der Form $\sum_{m=k}^{\infty} a_m$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ betrachten. Die Änderung in der Definition ist offensichtlich.

Definition 2.3.2. Es sei $q \in \mathbb{R}$. Unter der (unendlichen) geometrischen Reihe versteht man $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Satz 2.3.1. *Für* $|q| < 1$ *ist* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Für $|q| \geq 1$ *ist* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *divergent.*

Beweis. Für die Folge der Partialsummen $S_k := \sum_{n=0}^{k} q^n$ gilt: $S_{k+1} - S_k = q^{k+1}$. Nach dem Cauchykriterium (2.1.15) ist die unendliche Reihe höchstens dann konvergent, wenn $S_{k+1} - S_k \to 0$ für $k \to \infty$, also für $|q| < 1$.
Nach Beispiel 1.5.4 ist $S_k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$. Nach Satz 2.1.9 ist $\lim_{k\to\infty} q^{k+1} = 0$ für $|q| < 1$. Es gilt also $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.
Für $|q| \geq 1$ ist die unendliche Reihe divergent. $\square$

Beispiel 2.3.1. Wir bestimmen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.
Es ist

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Folglich ist

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Satz 2.3.2. *(Grenzwertsätze)*
Es seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen, und es sei* $a \in \mathbb{R}$. *Dann konvergieren die Reihen* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot a_k$, *und es gilt*

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

(ii) $a \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a \cdot a_k$

(iii) Ist $a_k \leq b_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*, dann gilt* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beweis. Wir beweisen nur (i):
Es seien $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$ die Partialsummen der beiden Reihen. Nach Definition 2.3.1 ist

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right) = \lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) \underset{S.2.1.7}{=} \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

□

2.4 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Satz 2.4.1. *Für eine konvergente Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis. Mit $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ ist $S_{k+1} - S_k = a_{k+1}$.
Die Behauptung folgt nach

Bemerkung 2.4.1. Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ folgt nicht die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wie wir bald in Beispielen sehen werden.

□

Definition 2.4.1. (absolute Konvergenz)
Eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz 2.4.2. *(i) Eine absolut konvergente Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist konvergent und es ist*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

(ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist genau dann absolut konvergent, wenn die Folge der Partialsummen* $\sum_{m=1}^{n} |a_m|$ *beschränkt ist.*

Beweis. (i) Wir wenden das Cauchykriterium (Satz 2.1.15) auf die konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ an. Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $n_0 = n_0(\epsilon)$, so daß $\sum_{n_1<k\leq n_2} |a_k| < \epsilon$ für alle $n_1, n_2 \geq n_0$. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\sum_{n_1<k\leq n_2} a_k \leq \sum_{n_1<k\leq n_2} |a_k| < \epsilon.$$

Aus der anderen Richtung des Cauchykriteriums folgt die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Es seien $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $T_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Nach der Dreiecksungleichung ist $|S_n| \leq T_n$. Nach Satz 2.1.8 (Erhaltung von Ungleichungen) folgt

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| = \left|\lim_{n\to\infty} S_n\right| \leq \lim_{n\to\infty} T_n = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

(ii) Die Folge (T_n) ist monoton wachsend. Die Behauptung folgt aus Satz 2.1.5 und Satz 2.1.12 (Monotoniekriterium).

□

Satz 2.4.3. *(Leibnizkriterium)*
Es sei $a_n \downarrow 0$. *Dann ist* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *konvergent.*

Beweis. Es sei $S_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
S_{2m+1} &= S_{2m} + (-1)^{2m+1} a_{2m+1} < S_{2m} \\
S_{2m+3} &= S_{2m+1} + (-1)^{2m+2} (a_{2m+2} - a_{2m+3}) > S_{2m+1} \\
S_{2m+2} &= S_{2m} + (-1)^{2m+1} (a_{2m+2} - a_{2m+1}) < S_{2m}
\end{aligned}$$

Wir setzen $I_m := [S_{2m+1}, S_{2m}]$, für das wegen den obigen Ungleichungen $I_{m+1} \subset I_m$ folgt. Es ist $|I_m| = |S_{2m} - S_{2m+1}| = |a_{2m}| \downarrow 0$. Nach Definition 2.1.9 ist die Folge (I_m) eine Intervallschachtelung. Nach Satz 2.1.13 existiert genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $S_{2m+1} \uparrow a$ und $S_{2m} \downarrow a$. □

Satz 2.4.4. *(Majorantenkriterium)*

Es seien (a_n) und (b_n) Folgen mit $|a_n| \le b_n$. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, und es ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beweis. Für die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{m=1}^{n} |a_m|$ gilt:

$$S_n \le \sum_{m=1}^{n} b_n \le \sum_{m=1}^{\infty} b_n.$$

Damit ist (S_n) beschränkt und konvergiert nach Satz 2.1.12 (Monotoniekriterium). $\square$

Definition 2.4.2. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiel 2.4.1. Wir betrachten $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Aus der Ungleichung $k+1 \le 2k$ folgt $\frac{1}{k^2} \le \frac{2}{k(k+1)}$. Nach Beispiel 2.3.1 ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 2$. Damit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ eine konvergente Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Nach Satz 2.4.4 ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent.

Bemerkung 2.4.2. Mit dem Majorantenkriterium kann die Frage der Konvergenz einer unendlichen Reihe entschieden werden. Der Wert der Reihe kann jedoch nicht bestimmt werden. In Beispiel 2.4.1 ist der Wert der Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 2$ sehr einfach zu bestimmen, nicht jedoch der Wert von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Satz 2.4.5. *(Minorantenkriterium)*

Es seien (a_n) und (b_n) Folgen mit $0 \le a_n \le b_n$. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

Beweis. Annahme: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert. Dann ist nach dem Majorantenkriterium $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, ein Widerspruch. $\square$

Definition 2.4.3. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt divergente Minorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Definition 2.4.4. Es sei (a_n) eine Folge und $a_n \geq 0$. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so schreibt man auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent, so schreibt man auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Zwei wichtige Kriterien, das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium erhält man, wenn man eine Reihe mit der geometrischen Reihe als Majorante oder Minorante vergleicht.

Satz 2.4.6. *(Quotientenkriterium)*
Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge mit* $a_n \neq 0$.

(i) Ist $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(ii) Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ *für alle* $n \geq n_0$, *so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Beweis. (i) Es sei $l := \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Dann ist $l = 1 - 2\epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Es sei $q := 1 - \epsilon$. Nach Satz 2.1.18 gibt es ein n_0, so daß $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für $n \geq n_0$ ist. Durch vollständige Induktion nach k zeigt man, daß $|a_{n_0+k}| \leq |a_{n_0}|q^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Somit ist

$$\sum_{n=1}^{n_0+k} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{n_0} |a_n| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_0}|q^k < \infty.$$

Die Folge der Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} |a_n|$ ist also beschränkt. Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

(ii) Aus $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$ folgt $|a_n| \geq |a_{n_0}|$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist das Konvergenzkriterium $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ von Satz 2.4.1 nicht erfüllt, und damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

□

Satz 2.4.7. *(Wurzelkriterium)*
Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge. Es sei* $l := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Dann gilt*

(i) Wenn $l < 1$ *ist, dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*

(ii) Wenn $l > 1$ *ist, dann divergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. (i) Aus $l < 1$ folgt $l = 1 - 2\epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Es sei $q := 1 - \epsilon$. Nach Satz 2.1.18 gibt es ein n_0, so daß $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für $n \geq n_0$ ist. Also ist $|a_n| \leq q^n$ für $n \geq n_0$. Somit ist

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{n_0} |a_n| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} q^n < \infty.$$

Die Folge der Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} |a_n|$ ist also beschränkt. Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(ii) Aus $l > 1$folgt $l = 1 + \epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Nach Satz 2.1.18 gibt es ein n_0, so daß $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für $n \geq n_0$ ist. Damit ist das Konvergenzkriterium $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ von Satz 2.4.1 nicht erfüllt, und damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

□

Es gibt Fälle, in denen weder das Quotienten- noch das Wurzelkriterium geeignet sind, die Frage der Konvergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe zu entscheiden. In diesen Fällen führen oft andere Kriterien zur Antwort. Wir werden später die sogenannten Integralkriterien kennenlernen.

Wir begnügen uns zunächst mit

Satz 2.4.8. *(Cauchyscher Verdichtungssatz)*
Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *monoton fallend und* $a_n \geq 0$. *Dann ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *genau dann konvergent, wenn die (verdichtete) Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *konvergiert.*

Beweis. Wir schreiben die Partialsumme $S_{2^{N+1}} = \sum_{n=1}^{2^{N+1}} a_n$ mit $N \in \mathbb{N}$ in der Form

$$S_{2^{N+1}} = \sum_{n=0}^{N+1} S_{2^n} \sum_{n=0}^{N} S_{2^n} = \sum_{n=0}^{N} (S_{2^{n+1}} - S_{2^n}) + S_1.$$

Es ist

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \quad \begin{cases} \geq 2^n a_{2^{n+1}} \\ \leq 2^n a_{2^n+1} \end{cases}$$

Deshalb folgt, daß

$$S_{2^{N+1}} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} 2^{n+1} a_{2^{n+1}} + a_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N+1} 2^n a_{2^n} + \frac{a_1}{2}$$

und

$$S_{2^{N+1}} \leq \sum_{n=0}^{N} 2^n a_{2^n+1} + a_1 \leq \sum_{n=0}^{N} 2^n a_{2^n} + a_1.$$

Also ist die Folge $(S_{2^{N+1}})_{N=0}^{\infty}$ genau dann beschränkt, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ beschränkt ist.
Weil die Folge $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ monoton wächst, ist $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ genau dann beschränkt, wenn $(S_{s^{N+1}})_{N=0}^{\infty}$ beschränkt ist.
Die Behauptung folgt nach Satz 2.4.2 (ii). □

Definition 2.4.5. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ heißt harmonische Reihe.

Satz 2.4.9. *Die harmonische Reihe ist divergent:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$

Beweis. Nach Satz 2.4.8 (Cauchyscher Verdichtungssatz) ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ genau dann divergent, wenn die "verdichtete Reihe" $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n}$ divergiert. Dies ist der Fall. □

Bemerkung 2.4.3. Die harmonische Reihe liefert ein Beispiel dafür, daß die Umkehrung von Satz 2.4.1 nicht gilt: Setzen wir $a_n = \frac{1}{n}$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.
Weiter läßt sich aus der harmonischen Reihe ein Beispiel für eine Reihe angeben, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Die "alternierende harmonische Reihe" $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert nach Satz 2.4.3 (Leibnizkriterium). Durch Bildung der Absolutbeträge entsteht jedoch die harmonische Reihe, welche divergiert.
Die Divergenz der harmonischen Reihe kann weder mit dem Quotienten- noch mit dem Wurzelkriterium entschieden werden, wie wir gleich sehen werden.

Wir wollen im folgenden Wurzel- und Quotientenkriterium vergleichen:
Als Vorbereitung beweisen wir

Satz 2.4.10. *Für $a > 0$ ist* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Beweis. (i) Wir nehmen zunächst $a > 1$ an:
Es sei $\sqrt[n]{a} = 1+\epsilon_n$ mit $\epsilon_n > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung ist $a = (1+\epsilon_n)^n \geq 1 + n\epsilon_n$, also $\epsilon_n \leq \frac{a-1}{n}$. Damit ist $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(ii) Ist $a < 1$, so wenden wir (i) mit $\frac{1}{a}$ an.

(iii) Für $a = 1$ ist die Behauptung klar.

□

Satz 2.4.11. *Es sei (a_n) eine Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(i) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

(ii) $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

(iii) Wenn der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *existiert, dann existiert auch der Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$*, und es gilt* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Beweis. Wir beweisen nur (i):
Es sei $l := \limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ und $\delta > 0$. Nach Satz 2.1.18 gibt es ein $n_0 = n_0(\delta)$, so daß $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ für alle $n \geq n_0$ ist. Durch vollständige Induktion folgt $\frac{a_{n_0+l}}{a_{n_0}} \leq q^l$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Wir setzen $n := n_0 + l$ und erhalten $a_n \leq^{n-n_0} a_{n_0}$. Es folgt $\sqrt[n]{a_n} \leq q \sqrt[n]{q^{-n_0} a_{n_0}}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q^{-n_0} a_{n_0}}$ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_1 = n_1(\epsilon)$, so daß $\sqrt[n]{a_n} \leq q + \epsilon$ für alle $n \geq n_1$ ist. □

Beispiel 2.4.2. Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$ ist konvergent, denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

Beispiel 2.4.3. Es sei $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$.
Weder Quotienten- noch Wurzelkriterium sind geeignet, die Frage der Konvergenz der (divergenten) Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oder der (konvergenten) Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zu entscheiden. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

und auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1$ (nach Satz 2.4.11 (i)).
Nach Satz 2.4.11 (i) ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Kann daher die Konvergenz einer Reihe mit dem Quotientenkriterium nachgewiesen werden ($\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$), so auch mit dem Wurzelkriterium. Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt. Das Wurzelkriterium ist also stärker als das Quotientenkriterium.

Beispiel 2.4.4. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $a_n = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{für} \quad n = 2m \\ n \cdot 2^{-n}, & \text{für} \quad n = 2m+1 \end{cases}$. es ist

$$\frac{a_{2m+1}}{a_{2m}} = \frac{1}{2}(2m+1) \to \infty, \quad \text{also } \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[2m+1]{(2m+1)2^{-(2m+1)}} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[2m+1]{2^{-(2m+1)}} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Das Wurzelkriterium zeigt also die Konvergenz der unendlichen Reihe, während das Quotientenkriterium keine Antwort liefert.

2.5 Bedingte und unbedingte Konvergenz, Produktreihen

Definition 2.5.1. Unter der Umordnung einer unendlichen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ versteht man eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, wobei n_k durch eine bijektive Abbildung $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \to \tau(k) = n_k$ gegeben ist.

Beispiel 2.5.1. Es sei die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ gegeben. Die bijektive Abbildung $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \to \tau(k) = n_k$ sei durch

$$\begin{aligned} \tau(3m) &= 2m \\ \tau(3m-2) &= 4m-3 \quad \text{und} \\ \tau(3m-1) &= 4m-1 \end{aligned}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ definiert. Dann haben wir die Umordnung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \dots$$

Diese umgeordnete Reihe kann auch folgendermaßen erhalten werden: Es sei $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, also

$$\begin{array}{rcccccccccc} s & = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & \pm\dots \\ \frac{1}{2}s & = & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & & -\frac{1}{8} & \pm\dots \end{array}$$

Dann ist

$$\frac{3}{2}s = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \pm \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k}.$$

Die umgeordnete Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n_k}$ hat also einen anderen Wert als die ursprüngliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definition 2.5.2. Eine konvergente Reihe heißt unbedingt konvergent, wenn jede Umordnung von ihr gegen denselben Wert konvergiert, sonst bedingt konvergent.

Satz 2.5.1. *(Umordnungssatz)*
Eine Reihe ist genau dann unbedingt konvergent, wenn sie absolut konvergiert.

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 2.5.3. (Cauchyprodukt)
Es seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ unendliche Reihen: das Cauchyprodukt ist durch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, wobei $c_n = \sum\limits_{k+l=n} a_k b_l = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{l=0}^{n} a_{n-l} b_l$ definiert ist.

Satz 2.5.2. *Sind* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut konvergent, so ist das Cauchyprodukt* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *mit* $c_n = \sum\limits_{k+l=n} a_k b_l$ *absolut konvergent, und es gilt die Cauchysche Produktformel*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Beweis. ohne Beweis. □

2.6 Dezimalbruchentwicklung

Definition 2.6.1. Es sei $g \in \mathbb{N}$ und $g \geq 2$. Unter der g- Bruchentwicklung von $a \in [0, \infty)$ versteht man eine Darstellung der Form

$$a = \sum_{m=0}^{n} a_m g^m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n g^{-n}, \tag{$*$}$$

wobei $a_m \in \{0, 1, \dots, g-1\}$ und $b_n \in \{0, 1, \dots, g-1\}$ mit $a_m \neq 0$ für $m > 0$ ist und folgende Form ausgeschlossen ist: $b_n = g - 1$ für alle $n \geq n_0$.

Bemerkung 2.6.1. Für $g = 10$ erhält man die vertraute Dezimalbruchentwicklung:
Für $a = \frac{1}{3}$ erhalten wir $a = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-n} = 0,33\ldots = 0,\overline{3}$.
Es ist also in $(*)$ dann $g = 10$, $a_m = 0$ für alle $m \geq 0$ und $b_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.6.1. *Es sei $g \in \mathbb{N}$ und $g \geq 2$. Jedes $a \in [0, \infty)$ besitzt genau eine g- Bruchentwicklung der Form $(*)$.*

Kapitel 3

Stetigkeit, Differenzierbarkeit

3.1 Grenzwerte von Funktionen

Definition 3.1.1. (Häufungspunkt)
Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt $\xi \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt (HP) von $\mathcal{D}$, wenn in jeder Umgebung $U_\epsilon(\xi)$ ein $x \in \mathcal{D}\backslash\{\xi\}$ liegt.
Ein $\xi \in \mathcal{D}$, das nicht Häufungspunkt von $\mathcal{D}$ ist, heißt isolierter Punkt.

Bemerkung 3.1.1. Ein Häufungspunkt von $\mathcal{D}$ braucht nicht zu $\mathcal{D}$ gehören. Ist $\mathcal{D} = (a, b)$ mit $a < b \in \mathbb{R}$, so sind a und b Häufungspunkte von $\mathcal{D}$, gehören aber nicht zu $\mathcal{D}$.

Definition 3.1.2. Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ eine Funktion und x_0 ein Häufungspunkt von $\mathcal{D}$.
Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0 (Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$, $(x \to x_0)$, falls gilt, daß für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert, so daß $|f(x) - a| < \epsilon$ für alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt.

Ein wichtiges Hilfsmittel zum Beweis von Aussagen über Grenzwerte von Funktionen ist das Folgenkriterium. Dadurch können die aus Kapitel 2 bekannten Tatsachen über die Grenzwerte von Folgen zur Anwendung gebracht werden.

Satz 3.1.1. *(Folgenkriterium)*
Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und x_0 ein HP von $\mathcal{D}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$

(ii) Für jede Folge $(z_n)_{n=1}^\infty$ mit $z_n \in \mathcal{D}\backslash\{x_0\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a.$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$:
Es sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $z_n \in \mathcal{D}\backslash\{x_0\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$.
Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach Definition 3.1.2 existiert ein $\delta = \delta(\epsilon)$, so daß für alle $x \in \mathcal{D}$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - a| < \epsilon. \tag{$*$}$$

Nach Definition 2.1.1 existiert ein $n_0 = n_0(\delta)$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $|z_n - x_0| < \delta$. Wegen $(*)$ ist dann auch $|f(z_n) - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Nach Definition 2.1.1 bedeutet dies

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$:
<u>Annahme</u>: Die Aussage $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ ist falsch.
Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein z_n mit $|z_n - x_0| < \frac{1}{n}$ mit $z_n \in \mathcal{D}\backslash\{x_0\}$ und $|f(z_n) - a| > \epsilon$ existiert. Dann ist nach Definition 2.1.1 die Aussage $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = a$ falsch, ein Widerspruch. $\square$

Satz 3.1.2. *(Eindeutigkeit des Grenzwerts)*
Es sei $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und x_0 ein HP von $\mathcal{D}$. Dann hat die Funktion f höchstens einen Grenzwert an der Stelle a.

Beweis. Dies folgt aus dem Folgenkriterium (Satz 3.1.1) und der Eindeutigkeit des Grenzwerts für Folgen (Satz 2.1.1). $\square$

Satz 3.1.3. *(Grenzwertsätze)*
Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, x_0 ein HP von $\mathcal{D}$ und $f, g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ mögen existieren. Dann existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)),$$

und es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x).
\end{aligned}$$

Ist $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung $U_\delta(x_0)$, so daß $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{D} \cap U_\delta(x_0)$. Es sei $h = \frac{f}{g}\big|_{\{x|\ g(x)\neq 0\}\cap\mathcal{D}}$. Dann ist

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Beweis. Es sei $b := \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$. Wir wenden Definition 3.1.2 mit $\epsilon = \frac{|b|}{2}$ an. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in U_\delta(x_0)$ gilt: $|g(x) - b| < \frac{|b|}{2}$ und damit $g(x) \neq 0$.
Alle anderen Aussagen werden bewiesen, indem man das Folgenkriterium und die entsprechenden Grenzwertsätze für Folgen (Satz 2.1.7) anwendet. □

3.2 Stetigkeit

Definition 3.2.1. Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathcal{D}$. Dann heißt f stetig im Punkt x_0, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ gibt, so daß $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $x \in \mathcal{D}$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Bemerkung 3.2.1. Ist x_0 ein isolierter Punkt von $\mathcal{D}$, so ist jede auf $\mathcal{D}$ definierte Funktion f stetig in x_0.

Satz 3.2.1. *Es sei $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathcal{D}$ ein HP von $\mathcal{D}$. Dann ist f im Punkt x_0 genau dann stetig, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Definition 3.1.2 für den Grenzwert und aus Definition 3.2.1 für die Stetigkeit. □

Bemerkung 3.2.2. Der Wert der Funktion im Punkt x_0, nämlich $f(x_0)$, spielt bei der Bestimmung des Grenzwerts $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ keine Rolle, wohl aber bei der Frage, ob f im Punkt x_0 stetig ist. Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ kann selbst dann existieren, wenn $f(x_0)$ gar nicht definiert ist. Aber f ist stetig in x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und mit dem Wert der Funktion $f(x_0)$ übereinstimmt.

Beispiel 3.2.1. Wir betrachten drei Beispiele einander sehr ähnlicher Funktionen:

a) Es sei $f\colon \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$, $x \to 2x$ mit $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$. Aus dem Folgenkriterium für Grenzwerte folgt, daß $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ist. Daher ist f stetig im Punkt 0, da $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ist.

b) Nun sei $g\colon \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$, $x \to 2x$ mit $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Es ist $0 \notin \mathcal{D}_2$, aber 0 ist Häufungspunkt von $\mathcal{D}_2$. Da $f|_{\mathcal{D}_2} = g$, folgt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. Aber g ist nicht stetig in 0, da 0 nicht zum Definitionsbereich von g gehört. Allerdings kann g durch die Definition $g(0) = 0$ stetig im Punkt 0 fortgesetzt werden. Damit wird der Definitionsbereich $\mathcal{D}_2$ zu $\mathcal{D}_1$ erweitert und g mit f identifiziert.

c) Schließlich sei $h\colon \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$, $x \to h(x)$ mit $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$
Es ist $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0 \neq h(0)$. Also ist h nicht stetig in $x = 0$.

Aus dem Folgenkriterium für Grenzwerte läßt sich leicht das Folgenkriterium für Stetigkeit gewinnen:

Satz 3.2.2. *(Folgenkriterium für Stetigkeit)*
Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und x_0 ein HP von $\mathcal{D}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Funktion f ist stetig in x_0.

(ii) Für jede Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $z_n \in \mathcal{D}\backslash\{x_0\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(x_0)$.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem Folgenkriterium für Grenzwerte (Satz 3.1.1) und der Definition der Stetigkeit (Definition 3.2.1). □

Bemerkung 3.2.3. Satz 3.2.2 gibt ein Beispiel für die Vertauschbarkeit zweier Operationen: Die eine Operation ist die Grenzwertoperation. Von einer Folge (a_n) wird der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ gebildet. Die zweite Operation ist die Bildung des Funktionswertes $x \to f(x)$. Satz 3.2.2 sagt, daß bei stetigen Funktionen f diese Operationen vertauscht werden können. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n\right)$. Bei unstetigen Funktionen ist eine Vertauschung i.a. nicht möglich. Für die Funktion aus Beispiel 3.2.1 c) $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$ und die Folge (z_n) mit $z_n = \frac{1}{n}$ haben wir

$$\lim_{n\to\infty} h(z_n) = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{1}{n} = 0 \quad \text{aber } h\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = h(0) = 1.$$

Satz 3.2.3. *Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathcal{D}$. Die Funktionen $f, g \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ seien im Punkt x_0 stetig. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ in x_0 stetig. Ist $g(x_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung $U_\delta(x_0)$, so daß $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{D} \cap U_\delta(x_0)$. Es sei $h = \frac{f}{g}|_{\{x|\ g(x)\neq 0\}\cap\mathcal{D}}$. Dann ist h im Punkt x_0 stetig.*

Beweis. Mann kann zunächst annehmen, daß x_0 ein HP von $\mathcal{D}$ ist, da Funktionen in isolierten Punkten ihres Definitionsbereichs immer stetig sind. Nach Voraussetzung ist $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Nach Satz 3.1.3 (Grenzwertsätze) folgt $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0)$ und damit die Stetigkeit von $f + g$ in x_0.
Die anderen Teile der Behauptung folgen ebenfalls aus Satz 3.1.3. □

Wir kommen nun zur Komposition stetiger Funktionen:

Satz 3.2.4. *(Kettenregel für stetige Funktionen)*
Es seien $\mathcal{D}, \mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ und $f \colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ sowie $g \colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}$. Es sei f in $x_0 \in \mathcal{D}$ stetig und g stetig in $y_0 = f(x_0) \in \mathcal{E}$. Dann ist die Funktion $g \circ f \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to (g \circ f)(x) = g(f(x))$ in x_0 stetig.

Beweis. Wir können annehmen, daß x_0 ein HP von f ist. Es sei (z_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$. Nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit (Satz 3.2.2) ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(x_0) = y_0$.

Wiederum nach dem Folgenkriterium, angewandt auf g, gilt für die Folge $(f(z_n))$ dann $\lim_{n\to\infty} g(f(z_n)) = g(y_0) = g(f(x_0))$. Also gilt für jede Folge (z_n) mit $\lim_{n\to\infty} z_n = x_0$ dann

$$\lim_{n\to\infty}(g \circ f)(z_n) = (g \circ f)\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = (g \circ f)(x_0).$$

Nach dem Folgenkriterium ist $g \circ f$ in x_0 stetig. □

3.3 Einseitige und uneigentliche Grenzwerte, einseitige Stetigkeit

Definition 3.3.1. Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein HP von $\mathcal{D}$.

(i) So heißt $a \in \mathbb{R}$ rechtsseitiger Limes von f an der Stelle x_0 (Schreibweise: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a$), falls x_0 HP von $\mathcal{D} \cap (x_0, \infty)$ ist, und wenn die Restiktion

$$g := f|_{\mathcal{D}\cap(x_0,\infty)}\colon \mathcal{D} \cap (x_0, \infty) \to \mathbb{R}$$

den Limes a besitzt, d.h. wenn $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$ gilt.

(ii) Analog wird der linksseitige Limes von f an der Stelle x_0 definiert. (Schreibweise: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a$).

(iii) Um Grenzwerte von einseitigen Grenzwerten zu unterscheiden, nennt man Grenzwerte im Sinne von Definition 3.1.2 auch beidseitige Grenzwerte.

Satz 3.3.1. *Es sei $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und x_0 sei HP sowohl von $\mathcal{D} \cap (x_0, \infty)$, als auch von $\mathcal{D} \cap (-\infty, x_0)$. Dann existiert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ genau dann, wenn der rechtsseitige und der linksseitige Limes von f an der Stelle x_0 existieren und übereinstimmen. In diesem Fall ist*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 3.3.2. (i) Eine Funktion $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in \mathcal{D}$ rechtsseitig stetig, wenn die Restiktion $g := f|_{\mathcal{D}\cap[x_0,\infty)}$ in x_0 stetig ist.

(ii) Analog wird linksseitige Stetigkeit definiert.

Satz 3.3.2. *Es sei $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathcal{D}$. Dann ist f in x_0 genau dann stetig, wenn es in x_0 rechts- und linksseitig stetig ist.*

Beweis. ohne Beweis. □

Es besteht nun noch die Möglichkeit, (ein- oder beidseitige) Grenzwerte für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ zu definieren, bzw. ∞ oder $-\infty$ als Grenzwert zuzulassen.

Definition 3.3.3. (i) Es sei $X \subset \mathbb{R}$. Dann heißt ∞ (bzw $-\infty$) uneigentlicher HP von X, wenn in jeder Umgebung $U_c(\infty) = (c, \infty)$ (bzw. $U_c(-\infty = (-\infty, c))$ ein $x \in X$ liegt.

(ii) Es sei $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und ∞ ein HP von $\mathcal{D}$. Dann ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ für $a \in \mathbb{R}$, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $c = c(\epsilon)$ existiert, so daß $|f(x) - a| < \epsilon$ für alle x mit $x \in U_c(\infty)$ ist.

(iii) Analog wird $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ definiert.

Definition 3.3.4. (i) Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und x_0 ein HP von $\mathcal{D}$. Man sagt $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, falls für alle $c > 0$ ein $\delta = \delta(c) > 0$ existiert, so daß $f(x) > c$, d.h. $f(x) \in U_c(\infty)$ für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.

(ii) Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und x_0 ein HP von $\mathcal{D} \cap (x_0, \infty)$. Man sagt $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$, falls für $g := f|_{\mathcal{D}\cap(x_0,\infty)}$ gilt: $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

(iii) Analog werden die Beziehungen

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

definiert.

Beispiel 3.3.1. Es sei $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = \frac{1}{x}$. Für alle $c > 0$ gilt $f(x) = \frac{1}{x} > c \Leftrightarrow 0 < x < c$ und $f(x) = \frac{1}{x} < -c \Leftrightarrow -c^{-1} < x < 0$. Also ist

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

3.4 Polynome und rationale Funktionen

Definition 3.4.1. Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

(i) Eine Funktion $P\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to P(x)$ mit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $0 \le k \le n$ heißt Polynom. Die a_k heißen Koeffizienten des Polynoms. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad des Polynoms, $n = gradP$. Ist $a_k = 0$ für $0 \le k \le n$, so heißt P das Nullpolynom und man setzt $gradP := -\infty$.

(ii) Es seien $P, Q\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ Polynome. Es sei $E \subset \{x \in \mathcal{D} |\ Q(x) \neq 0\} \neq \emptyset$. Dann heißt

$$R\colon E \to \mathbb{R}, \quad x \to R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

rationale Funktion.

Satz 3.4.1. *Polynome und rationale Funktionen sind in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches stetige Funktionen.*

Beweis. (i) Zunächst zeigen wir die Aussage für Polynome:
Wir können annehmen, daß $x_0 \in \mathcal{D}$ ein HP von $\mathcal{D}$ ist. Konstante Funktionen c mit $c(x) = c$ für alle $x \in \mathcal{D}$ sind nach dem Folgenkriterium (Satz 3.2.2) in $x_0 \in \mathcal{D}$ stetig. Für jede Folge (z_n) mit $z_n \in \mathcal{D}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$ ist $c(z_n) = c$ für alle n und damit $\lim\limits_{n\to\infty} c(z_n) = c = c(x_0)$.
Ebenso folgt die Stetigkeit der Identität: $id\colon x \to id(x) = x$.
Mit vollständiger Induktion folgt nach Satz 3.2.3, daß die Monome $M\colon x \to x^k$ stetig sind. Nach Satz 3.2.3 sind dann auch die konstanten Vielfachen $x \to c_k x^k$ stetig. Durch vollständige Induktion (nach der Anzahl der Summanden) folgt schließlich die Stetigkeit von $P(x)$.

(ii) Die Aussage für rationale Funktionen folgt aus Satz 3.2.3 (ii).

□

Beispiel 3.4.1. Es sei f durch $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x \in (-\infty, 1] \\ 2x-1 & \text{für} \quad x \in (1, \infty] \end{cases}$ definiert. In welchen $x_0 \in \mathbb{R}$ ist f stetig?

Lösung:
Nach Satz 3.4.1 sind $f_{|(-\infty,1)}$ bzw. $f_{|(1,\infty)}$ in allen $x_0 \in (-\infty, 1)$ bzw. $x_0 \in (1, \infty)$ stetig. Also ist f in $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ stetig. In allen $x_0 \neq 1$ existieren also die beidseitigen Grenzwerte und stimmen mit dem Funktionswert $f(x_0)$ überein. Also ist f stetig für $x_0 \neq 1$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (2x-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Alos ist $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.
Also ist f auch im Punkt $x_0 = 1$ stetig. Damit ist f in allen $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

Beispiel 3.4.2. Es sei g durch $g(x) = \begin{cases} 7x & \text{für} \quad x \in (-\infty, 2) \\ x^3-4 & \text{für} \quad x \in [2, \infty] \end{cases}$ definiert. In welchen $x_0 \in \mathbb{R}$ ist g stetig?

Lösung:
Nach Satz 3.4.1 sind $g_{|(-\infty,2)}$ bzw. $g_{|(2,\infty)}$ in allen $x_0 \in (-\infty, 2)$ bzw. $x_0 \in (2, \infty)$ stetig. Also ist g in $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ stetig. Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} g(x) &= \lim_{x\to 2^-} 7x = 14 \\ \lim_{x\to 2^+} g(x) &= \lim_{x\to 2^+} (x^3-4) = 8-4 = 4. \end{aligned}$$

Also existiert $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ nicht. Damit ist g in $x_0 = 2$*nichtstetig*.

Wir kommen nun zur Frage, inwieweit die Koeffizienten und der Grad eines Polynoms eindeutig bestimmt sind.

Beispiel 3.4.3. Es sei $\mathcal{D} = \{0, 1\}$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 1. \end{cases}$ So kann f auf unendlich viele Arten als Polynom geschrieben werden. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ stimmt das Polynom $P_n\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to x^n$ mit f überein. Die Differenz $P_{m,n} := g_n - g_m\colon x \to x^n - x^m$ stellen stets das Nullpolynom auf $\mathcal{D}$ dar, 0 und 1 sind Nullstellen des Polynoms $P_{m,n}$.

Diese Vieldeutigkeit hat ihre Ursache darin, daß der Definitionsbereich $\mathcal{D}$ sehr klein ist. Wir wollen als erstes prüfen, wieviele Nullstellen ein Polynom haben kann.

Definition 3.4.2. Es sei $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Ein $x_0 \in \mathcal{D}$ mit $f(x_0) = 0$ heißt Nullstelle von f.
Ist $f(x) = c$ für alle $x \in \mathcal{D}$, so schreiben wir auch $f(x) \equiv c$ (auf $\mathcal{D}$).
Das Polynom $P\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ mit $P(x) \equiv 0$ (auf $\mathcal{D}$) heißt Nullpolynom (auf $\mathcal{D}$).

Satz 3.4.2. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $P\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to P(x)$ ein Polynom mit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Für $x_0 \in \mathcal{D}$ gibt es dann ein Polynom $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ mit $b_k \in \mathbb{R}$ und $b_{n-1} = a_n$, so daß*

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + P(x_0) \quad \textit{für alle } x \in \mathcal{D} \quad \textit{gilt.} \tag{$*$}$$

Ist insbesondere x_0 eine Nullstelle von P, so ist $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}$.

Beweis. Wir führen vollständige Induktion nach n durch:
Induktionsanfang $n = 1$:
Dann haben wir das Polynom $P(x) = a_1 x + a_0$ mit $a_1 \neq 0$ gegeben.
Es ist $P(x) = a_1(x - x_0) + a_1 x_0 + a_0$. Es gilt also $(*)$ mit $Q(x) = a_1$.
Induktionsschritt $n \to n + 1$:
Es gelte die Induktionshypothese, und es sei $P(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$. Dann ist mit $R(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} x^k$

$$P(x) = (x - x_0)R(x) + x_0 R(x) + a_0. \tag{1}$$

Nach Induktionshypothese gibt es $c_i \in \mathbb{R}$, so daß mit $S(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$ gilt:

$$R(x) = (x - x_0)S(x) + R(x_0). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + P(x_0) \quad \text{mit } Q(x) := R(x) + x_0 S(x).$$

$\square$

Satz 3.4.3. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.*

Beweis. Es seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ verschiedene Nullstellen von $P(x)$. Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion nach k:

$$\text{Es ist } P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_k) \cdot Q_{n-k}(x) \text{ mit einem Polynom } Q_{n-k} \text{ vom Grad } n - k. \quad (1)$$

Induktionsanfang $k = 1$:
Dies ist Satz 3.4.2.
Induktionsschritt $k \to k + 1$:
Nach Induktionshypothese ist

$$P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_k) \cdot Q_{n-k}(x) \text{ mit einem Polynom } Q_{n-k} \text{ vom Grad } n - k. \qquad (2)$$

Nach Satz 1.4.8 ist

$$\prod_{l=1}^{k} (x_{k+1} - x_l) \neq 0$$

und damit $Q_{n-k}(x_{k+1}) = 0$ ebenfalls nach Satz 1.4.8. Nach Satz 3.4.2 ist

$$Q_{n-k}(x) = (x - x_{k+1}) Q_{n-(k+1)}(x) \qquad (3)$$

mit $grad Q_{n-(k+1)}(x) = n - (k + 1)$. Aus (2) und (3) folgt

$$P(x) = \prod_{l=1}^{k+1} (x - x_l) Q_{n-(k+1)}(x),$$

womit (1) gezeigt ist.
Für $k = n$ ergibt sich

$$P(x) = a_n \prod_{l=1}^{n} (x - x_l)$$

mit $a_n \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Wiederum nach Satz 1.4.8 folgt

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, \dots, x_n\}.$$

□

Satz 3.4.4. *(Identitätssatz für Polynome)*
Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und $P, Q \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ Polynome. Mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ seien $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ gegeben. Weiterhin gebe es $(n + 1)$ Elemente $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathcal{D}$ mit $P(x_j) = Q(x_j)$ für $1 \leq j \leq n + 1$. Dann ist $a_k = b_k$ für $0 \leq k \leq n$. Ist $P(x_j) = 0$ für $1 \leq j \leq n + 1$, so ist P das Nullpolynom.
Insbesondere sind der Grad und die Koeffizienten eines Polynoms durch seine Werte auf einer unendlichen Menge eindeutig bestimmt. Ist $P(x) = 0$ für unendlich viele Werte von x, so ist P das Nullpolynom.

Beweis. Man wendet Satz 3.4.3 auf das Polynom $P - Q$ an. □

Satz 3.4.2 ist ein Spezialfall des Euklidischen Algorithmus:

Satz 3.4.5. *(Euklidischer Algorithmus)*
Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $|\mathcal{D}| = \infty$ und $P, Q \not\equiv 0$ zwei Polynome auf $\mathcal{D}$. Dann gibt es zwei eindeutig bestimmte Polynome S, R mit $gradR < gradQ$, so daß $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}$ ist.

Beweis. ohne Beweis. □

Beispiel 3.4.4. Es sei $P(x) = 3x^5 + x^3 + 1$ und $Q(x) = x^3 + 2$. Division ergibt

$$3x^5 + x^3 + 1 = (x^3 + 2) \cdot (3x^2 + 1) + (-6x^2 - 1).$$

Es gelten der Faktorisierungssatz und der Satz von der Partialbruchzerlegung.

Satz 3.4.6. *(Faktorisierungssatz)*
Es sei P ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit paarweise verschiedenen Nullstellen $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ und den Vielfachheiten $\nu_1, \ldots, \nu_k \in \mathbb{N}$. Ist $\nu_1 + \ldots + \nu_k < n$, so gibt es eindeutig bestimmte, paarweise verschiedene normierte Polynome $P_1(x) = x^2 + b_1x + c_1, \ldots, P_l(x) = x^2 + b_lx + c_l$ vom Grad 2, welche keine reelle Nullstelle besitzen, d.h. es gilt $4c_j - b_j^2 > 0$ für $1 \leq j \leq l$, und es gibt eindeutig bestimmte Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_l \in \mathbb{N}$, so daß P die Produktdarstellung

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{\nu_1} \ldots (x - x_k)^{\nu_k} (P_1(x))^{\mu_1} \ldots (P_l(x))^{\mu_l}$$

besitzt. Es gilt $\nu_1 + \ldots + \nu_k + 2(\mu_1 + \ldots + \mu_l) = n$.

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 3.4.7. *(Partialbruchzerlegung)*
Es seien P, Q Polynome mit $gradP < gradQ$. Außerdem habe Q die (nach Satz 3.4.6 existierende) Produktdarstellung

$$Q(x) = (x - x_1)^{\nu_1} \cdots (x - x_k)^{\nu_k} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{\mu_1} \cdots (x^2 + b_lx + c_l)^{\mu_l}.$$

Dann besitzt R eine Partialbruchdarstellung der Form

$$R(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{A_i^{(1)}}{x - x_i} + \ldots + \frac{A_i^{(\nu_i)}}{(x - x_i)^{\nu_i}} \right) + \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{B_j^{(1)}x + C_j^{(1)}}{x^2 + b_jx + c_j} + \ldots + \frac{B_j^{(\mu_j)}x + C_j^{(\mu_j)}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{\mu_j}} \right)$$

mit $A_i^{(1)}, \ldots, A_i^{(\nu_i)}$, $i = 1, \ldots, k$ und $B_j^{(1)}, C_j^{(1)}, \ldots, B_j^{(\mu_j)}, C_j^{(\mu_j)}$, $j = 1, \ldots, l$.

Wir schließen mit der Diskussion von Grenzwerten von Polynomen und rationalen Funktionen:

Satz 3.4.8. *(i) Es sei* $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ein Polynom vom Grad* n*,* $P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *mit* $a_k \in \mathbb{R}$ *und* $a_n = 1$*. Dann ist*

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \textit{falls} \quad n \textit{ gerade} \\ -\infty, & \textit{falls} \quad n \textit{ ungerade ist.} \end{cases}$$

(ii) Es sei $R(x) := \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *mit Polynomen* P, Q *mit* $gradP < gradQ$*.*
Dann ist $\lim\limits_{x\to\pm\infty} R(x) = 0$*.*

(iii) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}$*. Dann ist für gerades* n

$$\lim_{x\to x_0} (x - x_0)^{-n} = \infty$$

und für ungerades n

$$\lim_{x\to x_0^+} (x - x_0)^{-n} = \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to x_0^-} (x - x_0)^{-n} = -\infty$$

(iv) Es seien R, S *rationale Funktionen und* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$*. Es sei* $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = \pm\infty$ *und* $\lim\limits_{x\to x_0} = c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*. Es sei* $T(x) := R(x) + S(x)$ *und* $U(x) := R(x) \cdot S(x)$*. Dann ist*

$$\lim_{x\to x_0} T(x) = \lim_{x\to x_0} R(x) \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to x_0} U(x) = \begin{cases} \lim_{x\to x_0} R(x), & \textit{falls} \quad c > 0 \\ -\lim_{x\to x_0} R(x), & \textit{falls} \quad c < 0. \end{cases}$$

Dabei ist $-(-\infty) = \infty$ *gesetzt.*
Für einseitige Grenzwerte gelten entsprechende Ausagen.

Beweis. ohne Beweis. □

Die Behandlung von uneigentlichen (ein- oder beidseitigen) Grenzwerten rationaler Funktionen oder Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ kann zusammen mit dem Euklidischen Algorithmus, Faktorisierung und Partialbruchzerlegung auf Satz 3.4.8 zurückgeführt werden.

3.5 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

Definition 3.5.1. Es sei $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$. Dann heißt f stetig auf $\mathcal{E}$, falls f in jedem Punkt $x \in \mathcal{E}$ stetig ist. Weiter heißt f nach oben beschränkt auf $\mathcal{E}$, falls es eine obere Schranke $s \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $|f(x)| \leq s$ für alle $x \in \mathcal{D}$ gilt. Entsprechend wird "nach unten beschränkt" definiert. Man nennt f dann beschränkt auf $\mathcal{E}$, falls es nach oben und nach unten beschränkt ist.

Satz 3.5.1. *(Stetigkeit auf kompakten Intervallen)*
Es sei $a \leq b \in \mathbb{R}$, $I = [a,b]$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig auf I. Dann gilt:

(i) Die Funktion f ist beschränkt auf $\mathcal{E}$.

(ii) Die Funktion f nimmt auf I Maximum und Minimum an, d.h. es existieren $m, M \in \mathbb{R}$ und $x_{\min}, x_{\max} \in I$, so daß $f(x_{\min}) = m$, $f(x_{\max}) = M$ und $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Beweis. Es sei $M \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ das Supremum des Bildes $f(I) = \{f(x)|\ x \in I\}$. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$ ist. Ist $M = \infty$, so ist der Limes uneigentlich. Nach dem Satz von Bolzano- Weiterstraß (Satz 2.1.14) hat die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mindestens einen Häufungswert z_0. Damit ist z_0 Häufungspunkt von I. Also enthält I alle seine Häufungspunkte, somit ist $z_0 \in I$. Nach Satz 2.1.10 gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ von (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = z_0$. Nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit (Satz 3.2.2) ist $f(z_0) = s$. Damit folgt $M \in \mathbb{R}$, d.h. $M \neq \infty$. Hiermit ist die Beschränktheit nach oben und die Existenz des Maximums gezeigt. Benützt man diese Tatsachen für $-f$ anstelle von f, so folgt die Existenz des Minimums und die Beschränktheit nach unten. □

Definition 3.5.2. Es sei $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$. Dann heißt f gleichmäßig stetig auf $\mathcal{E}$, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon)$ existiert, so daß $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $x, x_0 \in \mathcal{D}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.

Bemerkung 3.5.1. Jede auf $\mathcal{E}$ gleichmäßig stetige Funktion ist dort auch stetig. Dies folgt aus Definition 3.2.1. Die Zahl $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ wird dann im allgemeinen jedoch nicht nur von ϵ, sondern auch von x_0 abhängen. Ist $\mathcal{E}$ kein kompaktes Intervall, so braucht eine auf $\mathcal{E}$ stetige Funktion nicht gleichmäßig stetig zu sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 3.5.1. Es sei $\mathcal{D} = \mathcal{E} = (0,1)$ und $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist f auf $\mathcal{E}$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.
Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es ist

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|}$$

und damit

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon \Leftrightarrow |x - x_0| \geq \epsilon |x||x_0|.$$

Dies zeigt, daß für beliebige $\delta > 0$ die Aussage $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ höchstens dann gilt, wenn $|x - x_0| < \epsilon |x_0|$ ist. Also ist $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ für $|x - x_0| < \delta(\epsilon, x_0)$ mit $\delta(\epsilon, x_0) < \epsilon |x_0|$ erfüllt, also für kein $\delta > 0$, das nur von ϵ abhängt.

Auf kompakten Intervallen sind stetige Funktionen hingegen gleichmäßig stetig. Dieses Ergebnis ist eine Folgerung des Überdeckungssatzes von Heine- Borel. Zunächst definieren wir den Begriff der Überdeckung:

Definition 3.5.3. Es seien $I, X \subset \mathbb{R}$. Für alle $x \in X$ sei $U(x) := U_{\epsilon(x)}(x)$ mit $\epsilon(x) > 0$ eine $\epsilon(x)$- Umgebung von x. Die Menge $\mathcal{U} = \{U_\epsilon(x) |\ x \in X\}$ heißt eine Überdeckung von I, wenn $I \subseteq \bigcup_{x \in X} U(x)$.

Man nennt $\mathcal{V}$ eine Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$, falls $\mathcal{V} = \{U(x) |\ x \in Y\}$ mit $Y \subset X$ und $I \subseteq \bigcup_{x \in Y} U(x)$ ist.

Ist dazu Y endlich, so heißt $\mathcal{V}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$.

Satz 3.5.2. *(Überdeckungssatz von Heine- Borel)*
Es sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung des kompakten Intervalls I. Dann besitzt $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung.

Beweis. Es sei $I = [a, b]$.
Annahme: Es gibt eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von I, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.
Es sei $\mathcal{U} := \{U(x) |\ x \in X\}$ mit $X \subset \mathbb{R}$. Wir definieren nun durch vollständige Induktion eine Folge (I_n) von Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es bildet (I_n) eine Intervallschachtelung.

(ii) Es gilt: $|I_n| = |I| \cdot 2^{-n}$.

(iii) Die Überdeckung $\mathcal{U}$ von I besitzt keine endliche Teilüberdeckung.

Induktionsanfang: $n = 1$:
Dann ist $I_1 = I$.
Induktionsschritt: $n \to n + 1$:
Nach der Induktionshypothese besitzt die Überdeckung $\mathcal{U}$ von $I_n := [a_n, b_n]$ keine endliche Teilüberdeckung, und es ist $|I_n| = |I| \cdot 2^{-n}$. Dann ist $\mathcal{U}$ auch eine Überdeckung für die zwei Hälften $I_{n,1} := \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ und $I_{n,2} := \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$. Für mindestens eine der zwei Hälften $I_{n,j}$ mit $j \in \{1, 2\}$ existiert dann ebenfalls keine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$. Dann setzen wir $I_{n+1} := I_{n,j}$. Damit erfüllt die Folge (I_n) die Bedingungen (i), (ii) und (iii). Nach Satz 2.1.3 existiert ein $z_0 \in \mathbb{R}$, das allen Intervallen angehört. Da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von I ist, gibt es $x \in X$ mit $z_0 \in U(x)$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß $U_\epsilon(z_0) \subset U(x)$ ist. Weiter existiert ein n_0, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $I_n \subset U_\epsilon(z_0)$. Diese I_n werden aber von der einzigen Umgebung $U_\epsilon(z_0)$ überdeckt, im Widerspruch dazu, daß für die keine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ existiert. □

Satz 3.5.3. *Es sei I ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I. Dann ist f auf I gleichmäßig stetig.*

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$. Zu jedem $x_0 \in I$ gibt es ein $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, so daß für alle $x \in U_{3\delta}$ gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1}$$

Wir setzen

$$U(x_0) = U_\delta(x_0). \tag{2}$$

Es bildet $\mathcal{U} = \{U(x_0) |\ x_0 \in I\}$ eine Überdeckung von I. Nach Satz 3.5.2 besitzt $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung. Es gilt also $x_1, x_2, \ldots, x_m \in I$, so daß es für alle $x \in I$ ein k mit $1 \leq k \leq m$ und $x \in U(x_k) = U_\delta(\epsilon, x_k)$ gibt. Wir setzen $\delta := \min\{\delta(\epsilon, x_1), \ldots, \delta(\epsilon, x_m\}$. Es seien nun $x, x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta$. Dann gibt es k, l mit $1 \leq k, l \leq m$ mit $x \in U(x_k)$ und $x' \in U(x_l)$. Es ist (nach der Dreiecksungleichung, Satz 1.4.10) dann

$$|x_k - x_l| \leq |x_k - x| + |x - x'| + |x' - x_l| < 3\delta.$$

Wegen (1) und (2) folgt $|f(x_k) - f(x_l)| < \frac{\epsilon}{3}$. Schließlich ist

$$|f(x) - f(x')| < |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_l)| + |f(x_l) - f(x')| < \epsilon.$$

Also ist $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ für alle $x, x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta$, die gleichmäßige Stetigkeit. □

Satz 3.5.4. *(Zwischenwertsatz)*
Es sei $a < b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, und $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei stetig auf I. Es sei $f(a) < c < f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$, d.h. es gilt $[f(a), f(b)] \subset f(I)$.

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$X := \{z |\ a \leq z \leq b : f(x) \leq c,\ \forall x \in [a, z]\}.$$

Es ist $x \neq \emptyset$, da $a \in X$. Wegen $X \subset [a, b]$ ist X beschränkt. Also existiert $s = \sup X$.

(i) Wir zeigen zunächst: $f(s) \leq c$.
Es sei $x_n = s - \frac{s-a}{n}$. Wegen $a \leq x_n \leq s$ ist $f(x_n) \leq c$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$ ist nach dem Folgenkriterium $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(s)$ und wegen $f(x_n) \leq c$ ist $f(s) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq c$.
Damit ist (i) gezeigt.

(ii) Annahme: $f(s) < c$.
Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß $f(s) = c - 2\epsilon$ gilt. Wegen der Stetigkeit von f existiert ein $\delta = \delta(a)$, so daß für alle $x \in U_\delta(s) = (s - \delta, s + \delta)$ gilt: $|f(x) - f(s)| < \epsilon$ und somit $|f(x)| < c - \epsilon$. Damit ist aber $[a, s + \delta) \cap [a, b] \subset X$ im Widerspruch zu $\sup X = s$. Also ist $f(s) \geq c$.

Zusammengefaßt folgt $f(s) = c$. □

3.6 Monotone Funktionen, Umkehrfunktion

Definition 3.6.1. Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Dann heißt f monoton wachsend, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ mit $x_1 \leq x_2$ ist, und f heißt streng monoton wachsend, wenn $f(x_1) < f(x_2)$ gilt. Entsprechend wird monoton fallend bzw. streng monoton fallend definiert.

Satz 3.6.1. *Es sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $I = [a, b]$. Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < f(b)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Funktion f besitzt eine auf $[f(a), f(b)]$ definierte Inverse f^{-1}, d.h. die Gleichung $f(x) = c$ besitzt für alle $c \in [f(a), f(b)]$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x = f^{-1}(c)$.

(ii) Die Funktion f ist injektiv.

(iii) Die Funktion f ist streng monoton wachsend.

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 3.6.2. *Es sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $I = [a, b]$. Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion auf dem kompakten Intervall I.*
Dann ist die Inverse $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a, b]$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion auf $[f(a), f(b)]$.

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 3.6.3. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die n- te Wurzelfunktion $g: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \to g(x) = \sqrt[n]{x}$ ist auf $[0, \infty)$ stetig.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.6.2, wenn wir für f die streng monoton wachsende Funktion $f: [0, b] \to \mathbb{R}$, $x \to x^n$ wählen. Sie hat die Inverse $f^{-1}: [0, b^n] \to \mathbb{R}$, $x \to \sqrt[n]{x}$. Die Behauptung folgt mit $g := f^{-1}$, da b beliebig groß gewählt werden kann. □

3.7 Differenzierbarkeit

Definition 3.7.1. (i) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall. Dann heißt $f: I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Er heißt Ableitung oder Differentialquotient von f an der Stelle x_0.
Schreibweise: $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$.

(ii) Ist f für jedes $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf I.
Die Funktion $f': I \to \mathbb{R}$, $x \to f'(x)$ heißt die Ableitung von f.

Satz 3.7.1. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 die Ableitung $f'(x_0)$.

(ii) Es existiert eine Funktion $r\colon I \to \mathbb{R}$, $x \to r(x)$, wobei r in x_0 stetig und $r(x_0) = 0$ ist, so daß

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0). \qquad (*)$$

Beweis. $(i) \to (ii)$:
Wir setzen

$$\tilde{r}(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Dann ist $(*)$ für $x \neq x_0$ erfüllt, und es ist

$$\lim_{x \to x_0} \tilde{r}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0.$$

Wir definieren

$$r(x) = \begin{cases} \tilde{r}(x) & \text{für} \quad x \neq x_0 \\ 0 & \text{für} \quad x = x_0. \end{cases}$$

$(ii) \to (i)$:
Es gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \big(f'(x_0) + r(x)\big) = f'(x_0).$$

□

Bemerkung 3.7.1. Satz 3.7.1 besagt, daß für kleine Werte von $|x - x_0|$ die Funktion f sehr gut durch die lineare Funktion (Polynom 1. Grades) $L_f\colon x \to L_f(x)$ approximiert wird. Dabei ist $L_f(x)$ die lineare Approximation von f. Wir werden später Approximationen durch Polynome höheren Grades, sogenannte Taylorpolynome kennenlernen. Der Graph von L_f ist eine Gerade , die Tangente an der Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Weiter ist $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente. Sie ist der Grenzwert der Differentialquotienten

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

der Steigungen der Sekanten der Kurve $y = f(x)$ durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$. Eine gröbere Approximation ist durch die konstante Funktion $C_f(x) = f(x_0)$ (Polynom nullten Grades) gegeben. Ihr Graph ist die horizontale Gerade durch $(x_0, f(x_0))$. Es ist $f(x) = C_f(x) + s(x)$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} s(x) = 0$. Diese existiert auch für stetige Funktionen.

Satz 3.7.2. *(Eindeutigkeit der linearen Approximation)*
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Gilt $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$ mit $c \in \mathbb{R}$, r stetig in x_0 und $r(x_0) = 0$, so ist f differenzierbar in x_0, und es ist $c = f'(x_0)$.

Beweis. Aus $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$ folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c + r(x).$$

Also ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c + \lim_{x\to x_0} r(x) \equiv c.$$

Nach Definition 3.7.1 ist $c = f'(x_0)$. $\square$

Satz 3.7.3. *(Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit)*
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Ist f in x_0 differenzierbar, so ist es dort auch stetig.

Beweis. Aus $(*)$ aus Satz 3.7.1 folgt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x\to x_0} f'(x_0)(x-x_0) + \lim_{x\to x_0} r(x)(x-x_0) = f(x_0)$$

nach Satz 3.1.3. Nach Satz 3.2.1 folgt die Stetigkeit von f in x_0. $\square$

Bemerkung 3.7.2. Die Umkehrung von Satz 3.7.3 gilt nicht. Die Betragsfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to |x|$ ist in $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar. Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1, \quad \text{aber} \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1. \end{aligned}$$

Also existiert $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nicht.

3.8 Ableitungsregeln

Satz 3.8.1. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Funktionen $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ seien in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $af + bg$ und $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt*

(i) $(af+bg)'(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0)$ *(Linearität)*

(ii) $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ *(Produktregel)*

Beweis. Wir beweisen nur *(ii)*:
Für $x \in I$ mit $x \neq x_0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0} + \frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

□

Satz 3.8.2. *(Ableitung von Polynomen)*
Es sei $n\in\mathbb{N}$, und $P\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\to P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ mit $a_k\in\mathbb{R}$ sei ein Polynom.
Dann ist P für alle $x\in\mathbb{R}$ differenzierbar, und es ist $P'(x)=\sum_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}$.
Spezialfall: Es ist $\frac{d}{dx}x^n=n\cdot x^{n-1}$.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Ableitung der Identität $id\colon x\to x$. Es ist

$$id'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{id(x)-id(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Der Spezialfall ergibt sich dann durch vollständige Induktion nach n.
Der allgemeine Fall folgt aus der Linearität. □

Satz 3.8.3. *Es sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, und es seien $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ in $x_0\in I$ differenzierbar. Außerdem sei $g(x)\neq 0$ für $x\in I$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die Quotientenregel*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Beweis. Für $x,x_0\in I$ und $x\neq x_0$ gilt

$$\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(x)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)}=\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\frac{1}{g(x)g(x_0)}.$$

Der Grenzübergang $x\to x_0$ liefert die Behauptung. □

Satz 3.8.4. *Es seien $I,J\subset\mathbb{R}$ Intervalle, $f\colon I\to J$ sei im Punkt $x_0\in I$ differenzierbar und $g\colon J\to\mathbb{R}$ sei im Punkt $y_0=f(x_0)\in J$ differenzierbar. Dann ist $g\circ f\colon I\to\mathbb{R}$ im Punkt x_0 differenzierbar, und es gilt die Kettenregel*

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)\cdot f'(x_0).$$

Beweis. Nach Satz 3.7.1 ist für alle $x\in I$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+r(x)(x-x_0) \tag{1}$$

mit r stetig in x_0 sowie $r(x_0) = 0$ und

$$g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + s(y)(y - y_0). \tag{2}$$

für alle $y \in J$ mit s stetig in y_0 und $s(y_0) = 0$.
Indem wir in (2) dann $y = f(x)$ setzen, erhalten wir aus (1)

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(y_0)(f'(x_0)(x-x_0) + r(x)(x-x_0)) + s(f(x))(f'(x_0) + r(x)(x-x_0)). \tag{3}$$

Es sei

$$t(x) := g'(y_0)r(x) + s(f(x))(f'(x_0) + r(x)).$$

Die Funktion f ist stetig in $x = x_0$ und wegen $s(f(x_0)) = s(y_0) = 0$ folgt $t(x_0) = 0$. Also folgt aus (3)

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + g'(y_0)f'(x_0)(x - x_0) + t(x)(x - x_0)$$

mit t stetig in $x = x_0$ und $t(x_0) = 0$. Aus Satz 3.7.1 und 3.7.2 folgt $g \circ f$ ist differenzierbar in x_0, und es ist $(g \circ f)'(x_0) = g'(y)f'(x_0)$. □

Satz 3.8.5. *(Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)*
Es seien I, J Intervalle. Es sei $f\colon I \to J$ bijektiv und $x_0 \in I$. Es sei f im Punkt x_0 differenzierbar, und es sei $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die inverse Funktion $f^{-1}\colon J \to I$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und es ist

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Es sei $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $y_n \in J\backslash\{y_0\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sei durch

$$y_n = f(x_n) \Leftrightarrow x_n = f^{-1}(y_n)$$

definiert. Wegen der Stetigkeit von f^{-1} ist dann

$$\lim_{n\to\infty} x_n = f^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$

nach dem Folgenkriterium ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_9 - f(x_0)} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Wieder ist nach dem Folgenkriterium

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Beispiel 3.8.1. Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $x \to x^2$ hat die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $y \to \sqrt{y}$. Nach Satz 3.8.5 ist für $y_0 \in (0,\infty)$ dann

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Also ist, wenn wir wieder x statt y schreiben:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3.9 Mittelwertsatz, Monotonie

Definition 3.9.1. Es sei I ein Intervall. Für das Innere von I schreiben wir $\mathring{I}$.
Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $\xi \in I$. Man sagt: f besitzt in ξ ein relatives Maximum (bzw. relatives Minimum), falls es ein $\delta > 0$ gibt, so daß $f(x) \le f(\xi)$ (bzw. $f(x) \ge f(\xi)$) für alle $x \in U_\delta(\xi)$, (d.h. für alle $x \in I$ mit $|x-\xi| < \delta$), gibt. Die Funktion f besitzt in ξ ein relatives Extremum, falls es dort ein relatives Maximum oder Minimum besitzt.

Satz 3.9.1. *Es sei I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathring{I}$. Zudem sei f in ξ differenzierbar. Besitzt f in ξ ein relatives Extremum, so ist $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Wir können, falls wir nötigenfalls f durch $-f$ ersetzen, annehmen, daß f in ξ ein relatives Maximum besitzt. Es ist dann

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \ge 0, \tag{1}$$

da $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \ge 0$ für $x > \xi$ ist, und

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \le 0, \tag{2}$$

da $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \le 0$ für $x < \xi$ ist.
Aus (1) und (2) folgt $f'(\xi) = 0$. □

Satz 3.9.2. *(Satz von Rolle)*
Es sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $I = [a,b]$. Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei auf I stetig und auf $\mathring{I} = (a,b)$ differenzierbar. Es sei $f(a) = f(b) = 0$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Nach Satz 3.5.1 nimmt f auf I sein Maximum M und sein Minimum m an. Ist $f \equiv 0$, so ist $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a,b)$. Andernfalls ist $M > 0$ oder $m < 0$. Wir nehmen $f(\xi) = M > 0$ an. Wegen $f(a) = f(b) = 0$ ist $\xi \notin \{a,b\}$, also ist $\xi \in \mathring{I} = (a,b)$. Nach Satz 3.9.1 ist $f'(\xi) = 0$. □

Satz 3.9.3. *(1. Mittelwertsatz)*

Es sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $I = [a, b]$. Weiter sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf I stetig und auf $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Es sei

$$g(x) := f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dann ist $g(a) = g(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle (Satz 3.9.2) gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Bemerkung 3.9.1. Der Satz von Rolle und der 1. Mittelwertsatz lassen sich geometrisch so deuten, daß es mindestens einen Punkt ξ im Inneren des Intervalls $[a, b]$ gibt, so daß die Tangente an die Kurve $y = f(x)$ in $(\xi, f(\xi))$ parallel zur Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

Satz 3.9.4. *(2. Mittelwertsatz)*

Es sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $I = [a, b]$. Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Es sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$, und es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis. Wegen des Satzes von Rolle (Satz 3.9.2) ist $g(b) \neq g(a)$. Die Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ sei durch

$$h(x) := f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) \right)$$

definiert. Dann ist $h(a) = h(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$, d.h.

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

Wegen $g'(\xi) \neq 0$ folgt die Behauptung. □

Satz 3.9.5. *Es sei I ein beliebiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in I und differenzierbar in $\overset{\circ}{I}$. Dann gilt*

$$f'(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in I \Leftrightarrow \quad f \equiv const. \text{ auf } I.$$

Beweis. "$\Rightarrow$":
Es sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$. es seien $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2$. Nach dem Mittelwertsatz gilt dann

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$$

für ein $\xi \in (x_1, x_2)$. Deshalb ist $f(x) \equiv \text{const}$.
"$\Leftarrow$":
Klar. □

Satz 3.9.6. *(Monotonietest)*
Es sei I ein beliebiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ in I stetig und in $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar. Dann gilt

(i) Es gilt

$$f'(x) \geq 0 \quad \textit{für alle } x \in \overset{\circ}{I} \Leftrightarrow \ f \ \textit{ist monoton wachsend.}$$

(ii) Es gilt

$$f'(x) > 0 \quad \textit{für alle } x \in \overset{\circ}{I} \Rightarrow \ f \ \textit{ist streng monoton wachsend.}$$

Entsprechende Aussagen gelten für monoton fallenden Funktionen.

Beweis. (i) "$\Rightarrow$":
Es seien $x_2, x_2 \in I$. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 3.9.3) gibt es $\xi \in (x_1, x_2)$, so daß

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \underset{f'(\xi) \geq 0}{\Rightarrow} f(x_1) \leq f(x_2).$$

"$\Leftarrow$":
Es sei $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Es ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wegen $f(x) \geq f(x_0)$ für $x \geq x_0$ ist $f'(x_0) \geq 0$.

(ii) ohne Beweis.

□

Bemerkung 3.9.2. Die Rückrichtung in (ii) gilt nicht. Dies zeigt das Beispiel $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^3$. Obwohl f auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, ist $f'(0) = 0$.

Beispiel 3.9.1. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) := x^3 - 3x$. Man finde maximale Intervalle, auf denen f streng monoton wächst bzw. streng monoton fällt.
Lösung:
Es ist $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. es ist $f'(x) = 0$ für $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Somit ist $f'(x) > 0$ für $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Es ist $f'(x) < 0$ für $x \in (-1, 1)$. Nach Satz 3.9.6 ist f streng monoton wachsend auf $(-\infty, 1)$ und auf $(1, \infty)$ und strng monoton fallend auf $(-1, 1)$.

3.10 Höhere Ableitungen, Taylorpolynome

Definition 3.10.1. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$, dessen Ableitung f' auf I existiere.

(i) Ist f' auf I stetig, so heißt f stetig differenzierbar auf I (Schreibweise: $f \in C^1(I)$).

(ii) Die Ableitung $(f')(x_0)$ existiere in $x_0 \in I$. Dann heißt

$$f''(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) := (f')'(x_0) = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)(x_0)$$

die zweite Ableitung (oder Ableitung 2. Ordnung) von f an der Stelle x_0.

(iii) Falls $f''(x)$ für alle $x \in I$ existiert, dann heißt f zweimal differenzierbar auf I.

(iv) Ist zusätzlich f'' auf I stetig, dann heißt f zweimal stetig differenzierbar auf I (Schreibweise: $f \in C^2(I)$).

(v) Allgemein wird ducrh vollständige Induktion nach n die n- te Ableitung (oder Ableitung n- ter Ordnung) $f^{(n)}(x_0) = \dfrac{d^n f}{dx^n}(x_0)$ definiert und die Klasse $C^n(I)$ der n- mal stetig differenzierbaren Funktionen auf I.
Außerdem setzen wir $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$.

(vi) Existiert $f^{(n)}(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt f unendlich oft differenzierbar in x_0.

(vii) Ist $f^{(n)}(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in I$ erklärt, so heißt f unendlich oft differenzierbar in I (Schreibweise: $f \in C^\infty(I)$). In diesem Fall sind alle Ableitungen automatisch stetig, also ist f unendlich oft stetig differenzierbar.

Wir haben in Satz 3.7.1 gesehen, daß die erste Ableitung einer Funktion f für die lineare Approximation von f von Bedeutung ist. Es ist

$$f(x) = L_f(x) + r(x)(x - x_0)$$

mit $L_f(x(= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Es ist $L_f(x_0) = f(x_0)$ und $L'_f(x_0) = f'(x_0)$. So ist L_f das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad ≤ 1, das in x_0 dieselbe Ableitung bis zur 1. Ordnung besitzt wie f. Es ist nun zu erwarten, daß das Polynom höchstens n- ten Grades, das in x_0 dieselbe Ableitungen bis zur n- ten Ordnung besitzt wie f, eine besonders gute Approxiomation von f liefert.

Definition 3.10.2. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ dann n- mal differenzierbar. Dann heißt

$$T^{(n)} f(x_0, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

das n- te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Satz 3.10.1. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ genau n- mal differenzierbar und P ein Polynom vom Grad höchstens n. dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $P^{(k9}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ *mit* $0 \leq k \leq n$

(ii) $P(x) = T^{(n)}f(x_0, x)$.

Satz 3.10.2. *(Satz von Taylor)*
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Gegeben sei die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, welche $(n+1)$- mal stetig differenzierbar auf $\overset{\circ}{I}$ sei und n- mal stetig differenzierbar auf I. Dann gilt die Taylorsche Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = T^{(n)}f(x_0, x) + R_{n+1}(x_0, x)$$

für alle $x \in I$ und $x \neq x_0$. Dabei ist $\xi = x_0 + t(x - x_0)$ für ein $t \in (0, 1)$ und

$$R_{n+1}(x_0, x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

das Restglied von Lagrange.

Beweis. ohne Beweis. $\square$