Skript zur Vorlesung

Analytische Zahlentheorie

Sommersemester 2010

Prof. Dr. Helmut Maier
Dr. Daniel Haase
Dipl.-Math. Hans- Peter Reck

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie
Universität Ulm

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Charaktere und Gleichverteilung auf Gruppen

1.1 Gruppen und ihre Charaktere

Durch die analytische Zahlentheorie zieht sich wie ein roter Faden die Idee der Gleichverteilung von Folgen auf Gruppen und das Studium der Gleichverteilung durch Charaktere dieser Gruppen.

Definition 1.1.1. Es seien $(G, \circ)$ und $(H, \star)$ Gruppen mit den Verknüpfungen $\circ$ und $\star$. Eine Abbildung $\Phi\colon G \to H$ heißt Gruppenhomomorphismus, falls

$$\Phi(g_1 \circ g_2) = \Phi(g_1) \star \Phi(g_2)$$

für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt (Relationstreue).
In dieser Vorlesung wird die Gruppe G stets abelsch und die Gruppe H stets $H = \mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$ mit der Multiplikation sein. Ist die Gruppe G endlich, so versteht man unter einem Charakter χ von G einen Homomorphismus $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$. Auch für unendliche Gruppen G kann der Begriff des Charakters definiert werden, falls die Gruppe G eine topologische Gruppe ist. Ein Charakter χ von G ist dann ein stetiger Homomorphismus $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$.

Wir werden den Begriff der topologischen Gruppe in dieser Vorlesung nicht benötigen, da wir nur wenige Beispiele von unendlichen Gruppen betrachten. In jedem Fall wird klar sein, was unter Stetigkeit zu verstehen ist.

Satz 1.1.1. *Es sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe. Für jeden Charakter χ von G und für alle $g \in G$ ist dann $\chi(g)$ eine $|G|$- te Einheitswurzel. Insbesondere gibt es nur endlich viele Charaktere von G.*

Definition 1.1.2. Es sei $e(\alpha) := e^{2\pi i\alpha}$.

Wir schließen diesen ersten Abschnitt mit einer Liste der Beispiele, mit der wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen werden:

Beispiel 1.1.1. 1. Es sei $q \in \mathbb{N}$ und $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$ die Gruppe der Restklassen $\bmod q$ mit der Addition als Verknüpfung. Für $m \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ ergeben sich die Charaktere

$$e_{m,q} : \left\{ \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^* : \ r \bmod q \to \left(\frac{mr}{q}\right) \right\}.$$

2. Es sei $q \in \mathbb{N}$ und $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$ die Gruppe der zu q teilerfremden Restklassen $\bmod q$ bzgl. der Multiplikation. Die Charaktere von $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$ heißen Dirichletcharaktere $\bmod q$. Ihre Konstruktion ist komplizierter. Wir geben ein Beispiel: Es sei q eine Primzahl. Jede Primzahl besitzt eine Primitivwurzel, so besitzt etwa $q = 7$ die Primitivwurzel $r = 3$. Es ist $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \cdot)^*$ die zyklische Gruppe

$$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \cdot)^* = \left\{3^0 \bmod 7, 3^1 \bmod 7, \ldots, 3^6 \bmod 7\right\}.$$

   Ein Dirichletcharakter χ kann nun dadurch definiert werden, indem man für $\chi(3)$ eine beliebige sechste Einheitswurzel wählt: wir setzen $\chi_m(3) = e\left(\frac{m}{6}\right)$. Wegen der Relationstreue ist dann χ_m vollständig durch $\chi_m(3^k) = e\left(\frac{km}{6}\right)$ bestimmt.

   Nun zu unendlichen Gruppen:

3. Es sei $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Jedes $z \in \mathbb{C}^*$ hat eine Darstellung $z = e(\alpha)$, wobei α durch die Forderung $\alpha \in [0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt ist. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$e_n \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \ e(\alpha) \to e(n\alpha)$$

   ein Charakter von G. Die Forderung der Stetigkeit ist offenbar erfüllt.

4. Es sei $G = (\mathbb{R}, +)$. Für $\nu \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$e_\nu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*, \ t \to e(\nu t)$$

   ein Charakter.

Wir werden (zum Teil in Übungsaufgaben) zeigen, daß wir in den Beispielen stets sämtliche Charaktere der jeweiligen Gruppen beschrieben haben.

1.2 Gruppe der Charaktere, Orthogonalitätsrelation

Bis auf weiteres sei $(G, \cdot)$ eine endliche abelsche Gruppe mit neutralem Element e. Es sei $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$.

Definition 1.2.1. Es sei $\hat{G}$ die Menge aller Charaktere von G. Es seien $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ zwei Charaktere von G. Dann definieren wir das Produkt $\chi_1 \cdot \chi_2$ durch $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g) \cdot \chi_2(g)$ für alle $g \in G$. man sieht unmittelbar, daß $\chi_1 \cdot \chi_2$ wieder ein Charakter ist.

Satz 1.2.1. *Es ist $\hat{G}$ eine endliche Gruppe bzgl. der Multiplikation von Charakteren.*

Beweis. Der Charakter $\chi_0 \colon G \to \mathbb{C}^*, \ g \to 1$ ist offenbar ein neutrales Element der Multiplikation. Das Inverse zu $\chi \in \hat{G}$ ist der konjugiert komplexe Charakter $\overline{\chi} \colon G \to \mathbb{C}^*, \ g \to \overline{\chi(g)}$, da $\chi(g) \circ \overline{\chi(g)} = |\chi(g)| = 1$ für alle $g \in G$ ist. □

Definition 1.2.2. Das neutrale Element χ_0 der Gruppe $\hat{G}$ heißt auch der triviale Charakter von G. Bei Dirichletcharakteren ($G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$) spricht man auch vom Hauptcharakter. Ein $\chi \in \hat{G}$ mit $\chi \neq \chi_0$ heißt auch nichttrivialer Charakter.

Wir wollen nun die Anzahl der Charaktere $|\hat{G}|$ bestimmen. Dazu benötigen wir zunächst

Lemma 1.2.1. *Für $g \in G - \{e\}$ gibt es stets ein $\chi \in \hat{G}$ mit $\chi(g) \neq 1$.*

Beweis. Es sei $U = \langle g \rangle$ die von g erzeugte zyklische Untergruppe von G, also $U = \{e, g, \dots, g^{m-1}\}$, somit $|U| = m$. Es sei $G = U \cdot h_1 \,\dot{\cup}\, U \cdot h_2 \,\dot{\cup} \dots \dot{\cup}\, U \cdot h_l$ die Zerlegung von G in Rechtsnebenklassen der Untergruppe U. Dann hat jedes $l \in G$ eine eindeutige Darstellung $l = g^s \cdot h_t$. Wir definieren dann χ durch $\chi(l) = e\left(\frac{s}{m}\right)$. Man sieht dann leicht, daß χ ein Charakter von G ist. Es ist $\chi(g) = e\left(\frac{1}{m}\right) \neq 1$. □

Satz 1.2.2. *(i) Für $\chi \in \hat{G}$ ist*

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \textit{falls} \quad \chi = \chi_0 \\ 0, & \textit{falls} \quad \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

(ii) Für $g \in G$ ist

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |\hat{G}|, & \textit{falls} \quad g = e \\ 0, & \textit{falls} \quad g \neq e \end{cases}$$

Beweis. (i) Der Fall $\chi = \chi_0$ ist klar. Falls $\chi \neq \chi_0$ ist, gibt es ein $g_\chi \in G$ mit $\chi(g_\chi) \neq 1$. Mit g durchläuft auch $g_\chi \cdot g$ alle Elemente von G. Damit ist

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g_\chi \cdot g) = \chi(g_\chi) \sum_{g \in G} \chi(g).$$

Wegen $\chi(g_\chi) \neq 1$ folgt $\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$.

(ii) Der Fall $g = e$ ist klar. Ist $g \neq e$, so gibt es nach Lemma 1.2.1 ein $\chi_g \in \hat{G}$ mit $\chi_g(g) \neq 1$. Mit χ durchläuft auch $\chi_g \cdot \chi$ alle Elemente von $\hat{G}$. Damit ist

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} (\chi_g \cdot \chi)(g) = \chi_g(g) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g).$$

Wegen $\chi_g(g) \neq 1$ folgt $\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = 0$.

□

Satz 1.2.3. *Es ist $|G| = |\hat{G}|$.*

Beweis. Es ist

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi_0(g) + \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{g \in G} \chi(g).$$

Nach Satz 1.2.2 (i) verschwindet die Doppelsumme. Also ist

(1) $\displaystyle\sum_{\chi \in \hat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) = |G|.$

Weiter ist

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(e) + \sum_{g \neq e} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g).$$

Nach Satz 1.2.2 (ii) verschwindet auch diese Doppelsumme. Also ist

(2) $\displaystyle\sum_{\chi \in \hat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) = |\hat{G}|.$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. $\square$

Definition 1.2.3. Es sei $F(G,\mathbb{C}) = \{f\colon G \to \mathbb{C}\}$ der Vektorraum über $\mathbb{C}$ aller Funktionen vom Grad n. Wir definieren E_k für $1 \le k \le n$ durch

$$E_k(g) := \begin{cases} 1, & \text{für} \quad g = g_k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und nennen $B := \{E_1, \dots, E_n\}$ die "Standardbasis" von $F(G,\mathbb{C})$. Wir definieren auf $F(G,\mathbb{C})$ durch

$$\langle f, h\rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} f(g)\overline{h(g)}$$

für alle $f, h \in F(G,\mathbb{C})$ ein inneres Produkt.

Satz 1.2.4. *Es ist* $\dim F(G,\mathbb{C}) = n$ *und* $f = \sum_{k=1}^{n} f(g_k)E_k$.
Mit dem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ist* $F(G,\mathbb{C})$ *ein unitärer Vektorraum.*

Beweis. Man sieht unmittelbar, daß für $f\tilde{f} = \sum_{k=1}^{n} c_k E_k$ dann $\overline{f}(g_k) = c_k$ gilt.
Damit ist klar, daß die obige Form die einzige Darstellung von f als Linearkombination der E_k ist.
Also ist B eine Basis und $\dim(F(G,\mathbb{C})) = n$.
Die Eigenschaften eines inneren Produkts werden leicht nachgeprüft. $\square$

Aus Satz 1.2.2 (i) folgt nun leicht, daß $\hat{G}$ eine Orthonormalbasis von $F(G,\mathbb{C})$ ist.

Satz 1.2.5. *(i) (Orthogonalitätsrelation 1. Art:)*
Es seien $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$*. Dann ist*

$$\langle\chi_1, \chi_2\rangle = \begin{cases} 1, & \textit{falls} \quad \chi_1 = \chi_2 \\ 0, & \textit{sonst,} \end{cases}$$

das heißt

$$\sum_{g\in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \begin{cases} |G|, & \textit{falls} \quad \chi_1 = \chi_2 \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

(ii) (Orthogonalitätsrelation 2. Art:)
Es seien $g_1, g_2 \in G$*. Dann ist*

$$\sum_{\chi\in \hat{G}} \chi(g_1)\overline{\chi(g_2)} = \begin{cases} |G|, & \textit{falls} \quad g_1 = g_2 \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. (i) Wir wenden Satz 1.2.2 (i) für den Charakter $\chi = \chi_1\overline{\chi_2}$ an. Es ist genau dann $\chi = \chi_0$, wenn $\chi_1 = \chi_2$ ist.

(ii) Nun wenden wir Satz 1.2.2 (ii) für $g = g_1 g_2^{-1}$ an.

$\square$

Bemerkung 1.2.1. Der Teil (ii) von Satz 1.2.5 kann aus Teil (i) erhalten werden, wenn in Teil (i) die Gruppe G durch die Gruppe $\hat{G}$ ersetzt wird und man beachtet, daß $\hat{\hat{G}}$ mit G durch $g(\chi) := \chi(g)$ identifiziert werden kann.

Satz 1.2.5 besagt, daß $\hat{G}$ eine Orthonormalbasis (ONB) des Vektorraums $F(G,\mathbb{C})$ ist. Soweit ist es möglich, jedes $f \in F(G,\mathbb{C})$ als Linearkombination der χ auszudrücken:

$$f = \sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi \quad \text{oder} \quad f = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}(\chi_j)\chi_j, \quad \text{falls} \quad \hat{G} = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\} \tag{1}$$

ist.
Wie auf jedem unitären Vektorraum können die Koeffizienten bezüglich einer ONB durch Bildung des inneren Produkts erhalten werden. Dann folgt aus (1):

$$\langle f, \chi_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}(\chi_j)\,\langle \chi_j, \chi_k\rangle = \hat{f}(\chi_k).$$

Definition 1.2.4. Es sei $f \in F(G,\mathbb{C})$. Für $\chi \in \hat{G}$ heißen die inneren Produkte $\langle f,\chi\rangle$ (verallgemeinerte) Fourierkoeffizienten von f. Die Summe $\sum\limits_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi$ heißt (verallgemeinerte) Fourierreihe von f.

Die obige Diskussion ergibt folgenden

Satz 1.2.6. *Es wird $f \in F(G,\mathbb{C})$ durch seine Fourierreihe dargestellt:*

$$f = \sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi.$$

Satz 1.2.7. *Für $f \in F(G,\mathbb{C})$ gilt die Parsevalsche Gleichung:*

$$\sum_{g\in G} |f(g)|^2 = \sum_{\chi\in\hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2.$$

Beweis. Es ist nach Satz 1.2.6:

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G} |f(g)|^2 &= \langle f, f\rangle = \left\langle \sum_{\chi_1\in\hat{G}} \hat{f}(\chi_1)\chi_1, \sum_{\chi_2\in\hat{G}} \hat{f}(\chi_2)\chi_2 \right\rangle \\
&= \sum_{\chi_1,\chi_2\in\hat{G}} \hat{f}(\chi_1)\overline{\hat{f}(\chi_2)}\,\langle \chi_1, \chi_2\rangle \underset{\hat{G}\ \text{ONB}}{=} \sum_{\chi\in\hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2.
\end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zu den unendlichen Gruppen in unseren Beispielen:

$$G = (\mathbb{C}^*, \cdot) \quad \text{mit} \quad \hat{G} = \{e_n\colon n \in \mathbb{Z}\},$$

wobei $e\colon e(\alpha) \to e(n\alpha)$.
Es stellt sich zunächst die Frage nach den Orthogonalitätsrelationen. Im Falle der endlichen abelschen Gruppen basieren diese auf Satz 1.2.2 (i):
Für $\chi \in \hat{G}$ ist

$$\sum_{g\in G} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \text{falls} \quad \chi = \chi_0 \\ 0, & \text{falls} \quad \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

Wir erhalten ein Analogon für den Fall $G=(\mathbb{C}^*,\cdot)$, wenn wir die Summe durch ein Integral ersetzen:

$$\int_0^1 e(n\alpha)\,d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad n=0 \quad \text{d.h. } e_n \text{ trivialer Charakter} \\ 0, & \text{für} \quad n\neq 0 \end{cases}$$

Daraus ergeben sich leicht "Orthogonalitätsrelationen 1. Art":

$$\int_0^1 e(n_1\alpha)e(-n_2\alpha)\,d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad n_1=n_2 \\ 0, & \text{für} \quad n_1\neq n_2 \end{cases}$$

Das innere Produkt zweier Funktionen auf G sollte also als

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(\alpha)\overline{g(\alpha)}\,d\alpha$$

definiert werden. Es bleibt die Frage nach der Menge der Funktionen, die betrachtet werden. Will man mit dem Riemann- Integral auskommen, so muß man sich natürlich auf Riemann- integrierbare Funktionen beschränken. In der reellen Analysis, wo man das Lebesque- Integral zur Verfügung hat, wählt man den Vektorraum $L^2(\mathbb{C}^\times)$, den Vektorraum der Lebesque- integrierbaren Funktionen f mit endlicher L^2- Norm:

$$\int_0^1 |f(\alpha)|^2\,d\alpha < \infty.$$

Man erhält die klassische Theorie der Fourierreihe:
Es sei $f\in L^2(\mathbb{C}^*)$. Die Fourierreihe von f ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e(n\alpha)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(\alpha)e(-n\alpha)\,d\alpha.$$

Die Frage, ob f durch die Fourierreihe dargestellt wird, ist hier wesentlich komplizierter als bei endlichen Gruppen. Es gilt stets Konvergenz im quadratischen Mittel, d.h.

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1 \left| f(\alpha) - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e(n\alpha)\right|^2 d\alpha = 0.$$

Die punktweise Konvergenz kann jedoch nur unter starken Zusatzbedingungen, nämlich stetige Differenzierbarkeit, garantiert werden. Es gibt Beispiele für nur stetige Funktionen, bei denen sie nicht gilt.
Die "Orthogonalitätsrelationen 2. Art" sind:

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{-N<n\leq N} e(n(\alpha_1-\alpha_2)) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \alpha_1=\alpha_2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist $G=(\mathbb{R},+)$ mit $\hat{G}=\{e_\nu \mid \nu\in\mathbb{R}\}$, wobei $e_\nu\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}^*, \quad t\to e(\nu t)$.

Die "Orthogonalitätsrelationen 1. Art" sind hier:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e_{\nu_1}(t)\overline{e_{\nu_2}(t)}\,dt = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \nu_1=\nu_2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

An die Stelle der Fourierreihe tritt das Fourierintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e(xt)\,dt$$

mit der Fouriertransformierten

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu)e(-\nu t)\,d\nu.$$

1.3 Gleichverteilung auf Gruppen

Definition 1.3.1. Es sei $(G,\circ)$ eine endliche Gruppe, $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $g_n \in G$ eine Folge von Gruppenelementen. Für $g \in G$ und $x > 0$ sei

$$N(x,g) = |\{n \le x|\ g_n = g\}|\,.$$

Die Folge (g_n) heißt gleichverteilt auf G, falls für alle $g \in G$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}N(x,g) = |G|^{-1},$$

d.h. die Folge (g_n) nimmt jeden möglichen Wert asymptotisch gleich oft an.

Eine Grundidee der analytischen Zahlentheorie ist, die Gleichverteilung von Folgen auf Gruppen zur Größe von Charaktersummen in Beziehung zu setzen.

Satz 1.3.1. *Es sei $(G,\circ)$ eine endliche Gruppe mit Charaktergruppe $\hat{G}$, dessen neutrales Element der triviale Charakter χ_0 ist. Es sei $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von Elementen von G. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Folge (g_n) ist gleichverteilt auf G.

(ii) Für jeden Charakter $\chi \ne \chi_0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{k\le x}\chi(g_k) = 0.$$

Beweis. $(i) \to (ii)$:
Es sei $\chi \ne \chi_0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{k\le x}\chi(g_k) &= \sum_{g\in G}\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{\substack{k\le x\\ g_k=g}}\chi(g) = \sum_{m\in G}\chi(g)\lim_{x\to\infty} x^{-1}N(x,g)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{m\in G}\chi(g) = 0.\end{aligned}$$

$(ii) \to (i)$:
Es sei $g \in G$. Nach den Orthogonalitätsrelationen 2. Art (Satz 1.2.5 (ii)) ist

$$\begin{aligned}N(x,g) &= \sum_{\substack{k\le x\\ g_k=g}} 1 = \sum_{\chi\in\hat{G}}\frac{1}{|G|}\sum_{k\le x}\chi(g_k)\overline{\chi(g)}\\ &= \overline{\chi_0(g)}\frac{1}{|G|}\sum_{k\le x}\chi_0(g_k) + \sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi(g)}\frac{1}{|G|}\sum_{k\le x}\chi(g_k).\end{aligned}$$

Wegen $\chi_0(g) = 1$ und wegen (i) folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^{-1}N(x,g) &= \frac{1}{|G|}\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{k\leq x} 1 + \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi(g)}\frac{1}{|G|}\left(\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{k\leq x}\chi(g_k)\right) \\
&= \frac{1}{|G|}.
\end{aligned}$$

$\square$

Kapitel 2

Die Riemannsche Zeta-Funktion und der Primzahlsatz

2.1 Einleitung

Die Primzahlen standen seit jeher im Mittelpunkt des Interesses vieler Mathematiker. Euklid konnte um 300 v.Chr. die Existenz von unendlich vielen Primzahlen beweisen. Zur feineren Untersuchung führt man die Primzahlzählfunktion

$$\pi(x) \;=\; \big|\{p \leq x : \; p \,\mathrm{prim}\}\big| \;=\; \sum_{p \leq x} 1$$

ein. Hierbei gilt die Konvention, an die wir uns auch künftig halten wollen, daß der Buchstabe p unter einem Summen- bzw. Produktzeichen bedeutet, daß die Summe bzw. das Produkt nur über Primzahlen erstreckt wird. Der Primzahlsatz, der 1792 von Gauß vermutet, aber erst 1896 von Hadamard und de la Vallée-Poussin unabhängig voneinander bewiesen werden konnte, besagt, daß

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} \;=\; 1$$

ist. Die Beweise von Hadamard und de la Vallée-Poussin waren funktionentheoretischer Natur und beruhten auf der Beziehung zwischen Primzahlen und der Riemannschen Zeta-Funktion. Diese Beziehung wurde als erstes von Euler im 18. Jahrhundert entdeckt, der die Zeta-Funktion nur als Funktion einer reellen Variable betrachtete:

Definition 2.1.1. Die Zeta-Funktion ist

$$\zeta(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

für $s > 1$.

Satz 2.1.1 (Euler)**.** *Die Zeta-Funktion besitzt für $s > 1$ die Produktdarstellung*

$$\zeta(s) \;=\; \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}\,.$$

Bemerkung 2.1.1. Dieses Produkt wird auch Eulerprodukt genannt.

Beweis. Die Produktdarstellung ist eine Folge des Fundamentalsatzes der Arithmetik: jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ läßt sich eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen:

$$n \;=\; \prod_p p^{\alpha(p)} \;\;,\;\; \alpha(p) \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \alpha(p) > 0 \text{ nur für endlich viele } p\,.$$

Wir betrachten nun das Produkt

$$\prod_{p \le y} \frac{1}{1-p^{-s}} \;=\; \prod_{p \le y} \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots\right)\;.$$

Da die endlich vielen geometrischen Reihen in dem Produkt absolut konvergieren, darf das Produkt ausmultipliziert und die Summanden beliebig angeordnet werden:

$$\prod_{p \le y} \frac{1}{1-p^{-s}} \;=\; \sum{}' \,(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r})^{-s} \;\;,$$

wobei in Σ' sämtliche Produkte von Primzahlpotenzen $p_j^{\alpha_j}$ mit $p_j \le y$ vorkommen. Nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik ergibt sich

$$\prod_{p \le y} \frac{1}{1-p^{-s}} \;=\; \sum{}'' n^{-s}\,,$$

wobei in Σ'' sämtliche natürlichen Zahlen n vorkommen, die nur Primfaktoren $p \le y$ besitzen, insbesondere auch alle $n \le y$. Damit folgt

$$\left|\prod_{p \le y} \frac{1}{1-p^{-s}} - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\right| \;\le\; \sum_{n>y} n^{-s}\,,\ \text{also} \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \;=\; \lim_{y\to\infty} \prod_{p \le y} \frac{1}{1-p^{-s}} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \;=\; \zeta(s)\,.$$

□

Riemann betrachtete 1859 die Zeta-Funktion erstmals als Funktion der komplexen Variablen $s \in \mathbb{C}$, und zeigte unter anderem, daß sich $\zeta(s)$ auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzen läßt. Er stellte außerdem einige Vermutungen auf, die zum Teil 1894 von v. Mangoldt bewiesen wurden. Die berühmte Riemannsche Vermutung bleibt bis heute unbewiesen. Im Jahre 1896 bewiesen dann Hadamard und de la Vallée-Poussin den Primzahlsatz unter Verwendung der analytischen Eigenschaften von $\zeta(s)$. Wir werden in diesem Kapitel die grundlegenden analytischen Eigenschaften der Riemannschen Zeta-Funktion besprechen und dann den Beweis des Primzahlsatzes geben. Wir werden dabei jedoch nicht der Methode von Hadamard und de la Vallée-Poussin folgen, sondern im wesentlichen eine Methode von Edmund Landau benützen. Zunächst werden wir einige elementare Hilfsmittel besprechen.

2.2 Die Verwendung der Symbole O und o

Der Primzahlsatz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} \;=\; 1$$

läßt sich auch folgendermaßen formulieren: Für $x \ge 2$ gilt

$$\pi(x) \;=\; \frac{x}{\log(x)} \;+\; R(x)\,,$$

wobei für das Restglied $R(x)$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{x/\log(x)} \;=\; 0\,.$$

Der Term $\frac{x}{\log(x)}$ heißt Hauptglied. Beziehungen der Form

$$\text{Unbekannte Funktion} \;=\; \text{Hauptglied} \;+\; \text{Restglied}\,,$$

wobei das Hauptglied explizit bekannt ist, während für das Restglied eine Abschätzung gegeben ist, sind zentral in der analytischen Zahlentheorie. Zur Vereinfachung der Formulierung hat E. Landau die nach ihm benannten O- und o- Symbole eingeführt. Diese alternative Beziehung wird mittels dieser Symbole folgendermaßen formuliert:

$$\pi(x) \;=\; \frac{x}{\log(x)} \;+\; o\left(\tfrac{x}{\log(x)}\right) \quad (x\to\infty)$$

oder auch

$$\pi(x) \;=\; \frac{x}{\log(x)}\cdot(1+o(1)) \quad (x\to\infty)\,.$$

Definition 2.2.1. Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen, die für genügend große positive x definiert sind, und es sei $f(x)$ beliebig komplex, $g(x)>0$, eventuell nur für genügend große x. Dann soll

$$f(x) \;=\; O\,(g(x)) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \;=\; o\,(g(x)) \quad (x\to\infty)$$

bedeuten, daß für genügend große x gilt:

$$|f(x)| \;\le\; A\cdot g(x) \quad \text{für passendes } A>0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{|f(x)|}{g(x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Analog mögen die Beziehungen

$$f(x) \;=\; O\,(g(x)) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \;=\; o\,(g(x)) \quad (x\to a+) \quad \text{oder} \quad (x\to a-)$$

definiert sein, wobei $g(x)>0$ für x nahe bei a vorausgesetzt ist.

Beispiel 2.2.1. Es gilt

$$\sqrt{x^2+1} \;=\; x+O\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad (x\to\infty) \quad , \quad \frac{1}{\log(x)} \;=\; O\left(\tfrac{1}{x-1}\right) \quad (x\to 1+)\,.$$

Bemerkung 2.2.1. Manchmal hängt die im O- Symbol implizierte Konstante auch noch von anderen Parametern ab. Diese können dann in Indexform an das O- Symbol angehängt werden, etwa $O_\epsilon(f(x))$.

2.3 Abelsche partielle Summation und Eulersche Summenformel

Satz 2.3.1. *(Abelsche partielle Summation)*
Es seien $a<b$ reelle Zahlen und $c_1, c_2, \ldots$ komplexe Zahlen. Es sei $c(x)=\sum\limits_{a<n\le x} c_n$.

Dann gilt:

(i) (diskrete Version)
Es seien $f_1,\ldots f_n$ komplexe Zahlen mit $(\Delta f)_n = f_{n+1}-f_n$. Dann gilt:

$$\sum_{a<n\le b} c_n f_n = c(b) f_{[b]} - \sum_{a<n\le b-1} c(n)\,(\Delta f)_n\,.$$

(ii) (kontinuierliche Version)
Es gilt

$$\sum_{a<n\le b} c_n f_n = c(b)f(b) - \int_a^b c(t)f'(t)\,dt.$$

Beweis. (i) Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\le b} c_n f_n &= \sum_{a<n\le b} (c(n) - c(n-1))\, f_n \\ &= \sum_{a<n\le b} c(n) f_n - \sum_{a<n\le b-1} c(n) f_{n+1} \\ &= c(b) f_{[b]} - \sum_{a<n\le b-1} c(n)\,(f_{n+1} - f_n)\,.\end{aligned}$$

Dies beweist Teil (i).

(ii) Es seien die Voraussetzungen von Teil (ii) erfüllt. Zudem setzen wir $f_n := f(n)$. Für $t \in [n, n+1)$ ist $c(t) = c(n)$, und es ist $f_{n+1} - f_n = \int_n^{n+1} f'(t)\,dt$, also

$$c(n)\,(f_{n+1} - f_n) = \int_n^{n+1} c(t)f'(t)\,dt. \tag{1}$$

Außerdem ist

$$c(b)f(b) - c([b])f_{[b]} = \int_{[b]}^b c(t)f'(t)\,dt. \tag{2}$$

Damit folgt aus (i), (1) und (2)

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\le b} c_n f_n &= c(b)f(b) - (c(b)f(b) - c([b])f([b])) - \int_a^{[b]} c(t)f'(t)\,dt \\ &= c(b)f(b) - \int_a^b c(t)f'(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

Satz 2.3.2. *(Eulersche Summenformel)*
Es seien $a < x$ reelle Zahlen. Die Funktion $g\colon [a,x] \to \mathbb{C}$ sei stetig und (stückweise) stetig differenzierbar auf $[a,x]$. Wir setzen $P_0(x) := x - [x] - 1/2$. Dann ist

$$\sum_{a<n\le x} g(n) = \int_a^x g(u)\,du + \int_a^x P_0(u)g'(u)\,du - g(x)P_0(x) + g(a)P_0(a).$$

Beweis. Übungen. □

2.4 Dirichletsche Reihen

Bevor wir zur Diskussion der Riemannschen Zeta-Funktion als Funktion der komplexen Variablen $s \in \mathbb{C}$ kommen, wollen wir die allgemeine Funktionsklasse diskutieren, der die Zeta-Funktion angehört, die Dirichletschen Reihen.

Definition 2.4.1. Eine Dirichletreihe ist eine unendliche Reihe der Form

$$D(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad , \quad a_n \in \mathbb{C}\;,\; s \in \mathbb{C}\,.$$

Es stellt sich sofort die Frage nach dem Konvergenzbereich von $D(s)$ und nach den analytischen Eigenschaften - insbesondere Holomorphie - von $D(s)$ in diesem Bereich. Im Zusammenhang mit Dirichletschen Reihen ist die Schreibweise $s = \sigma + it$, $\sigma = \mathrm{Re}(s)$, $t = \mathrm{Im}(s)$ üblich (oder, falls eine Folge vorliegt, $s_j = \sigma_j + it_j$).

Satz 2.4.1. *Es sei*

$$D(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

in einem Punkt s_0 konvergent, dann konvergiert $D(s)$ gleichmäßig in dem Winkelraum $|\arg(s-s_0)| < \frac{1}{2}\pi - \delta$ für festes $\delta > 0$. Die Funktion $D(s)$ ist in der Halbebene $\{\sigma > \sigma_0\}$ holomorph.

Beweis. Mit partieller Summation (Satz 2.3.1) folgt

$$\begin{aligned}\sum_{M<n\le N} a_n n^{-s} \;&=\; \sum_{M<n\le N} a_n n^{-s_0} n^{s_0-s} \\ &=\; N^{s_0-s} \sum_{M<n\le N} a_n n^{-s_0} - \int_M^N \left(\sum_{M<n\le u} a_n n^{-s_0} \right) (s_0-s) u^{s_0-s-1} du\,.\end{aligned}$$

Es ist $|N^{s_0-s}| = N^{\sigma_0-\sigma} \le 1$. Wegen der Konvergenz von $\sum a_n n^{-s_0}$ ist

$$\left| \sum_{M<n\le u} a_n n^{-s_0} \right| \;<\; \varepsilon$$

für $M > M_0(\varepsilon)$ groß genug und jedes $u > M$, und damit

$$\left| N^{s_0-s} \cdot \sum_{M<n\le N} a_n n^{-s} \right| \;<\; \varepsilon$$

im Winkelraum $|\arg(s-s_0)| < \frac{1}{2}\pi - \delta$. Es ist

$$\left| (s_0-s) u^{s_0-s-1} \right| \;\le\; \frac{1}{\sin(\delta)} \cdot (\sigma-\sigma_0) u^{\sigma-\sigma_0-1}$$

und damit

$$\left| \int_M^N \left(\sum_{M<n\le u} a_n n^{-s_0} \right) (s_0-s) u^{s_0-s-1} du \right| \;\le\; \frac{\varepsilon}{\sin(\delta)} M^{\sigma-\sigma_0} \;\le\; \frac{\varepsilon}{\sin(\delta)}\,.$$

Damit folgt der erste Teil des Satzes. Jede kompakte Teilmenge von $\{s = \sigma + it \ : \ \sigma > \sigma_0\}$ ist für ein genügend kleines $\delta > 0$ im Winkelraum $|\arg(s - s_0)| < \frac{1}{2}\pi - \delta$ enthalten. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

ist damit kompakt konvergent in $\{\sigma > \sigma_0\}$, und damit holomorph. □

Satz 2.4.2. *Zu jeder Dirichletreihe*

$$D(s) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

gibt es stets ein $\sigma_c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, *so daß* $D(s)$ *für alle* $s = \sigma + it$ *mit* $\sigma > \sigma_c$ *konvergiert, und für* $\sigma < \sigma_c$ *divergiert.*

Beweis. Man setze

$$\sigma_c \ = \ \inf\left\{\sigma \in \mathbb{R} : \ \exists s = \sigma + it : \ \sum a_n n^{-s} \text{ konvergiert}\right\} \ ,$$

Die Behauptung folgt dann aus dem vorigen Satz. □

Definition 2.4.2. Der Wert σ_c heißt Konvergenzabszisse der Dirichletreihe $D(s)$.

Die Fälle $\sigma_c = \pm\infty$ können eintreten:

Beispiel 2.4.1. Die Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n n^{-s}$$

konvergiert für kein $s \in \mathbb{C}$, hat also die Konvergenzabszisse $\sigma_c = \infty$. Dagegen konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n^{-s}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ und hat die Konvergenzabszisse $\sigma_c = -\infty$. Auch alle Dirichletpolynome

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \ \ , \ \ a_n \neq 0 \text{ nur endlich oft}$$

haben die Konvergenzabszisse $\sigma_c = -\infty$.

2.5 Arithmetische Funktionen und ihre Erzeugenden Dirichlet- Reihen

Definition 2.5.1. Eine arithmetische Funktion ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ von den natürlichen Zahlen in die komplexen Zahlen. Eine arithmetische Funktion f heißt additiv, falls $f(mn) = f(m) + f(n)$ für $ggT(m,n) = 1$ ist bzw. multiplikativ, falls $f(1) = 1$ und $f(mn) = f(m)f(n)$ für $ggT(m,n) = 1$ ist. Vollständig additiv bzw. vollständig multiplikativ heißt f, falls die Gleichungen $f(mn) = f(m) + f(n)$ bzw. $f(mn) = f(m)f(n)$ auch ohne die Zusatzbedingung $ggT(m,n) = 1$ gelten.

Im folgenden werden einige Beispiele arithmetischer Funktionen definiert:

Definition 2.5.2. 1. In der Analysis vorkommende Besipiele vollständig additiver bzw. multiplikativer Funktionen sind $\log n$ bzw. n^α für $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Die Funktion

$$\epsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad n = 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist vollständig multiplikativ.

3. Die Funktion 1 mit $1(n) := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist ebenfalls vollständig multiplikativ.

4. Sei $\Omega(n) := \sum_{p^\alpha | n} \alpha$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n (mit Vielfachheit gezählt) und $\omega(n) := \sum_{p|n} 1$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n. Dann ist Ω vollständig additiv und ω additiv.

5. Die Eulersche φ- Funktion ist multiplikativ.

6. Die <u>Möbiusfunktion</u> μ ist durch

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)}, & \text{falls } n \text{ quadratfrei ist,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Wir werden zeigen, daß μ multiplikativ ist.

7. Die <u>Teilerfunktion</u> $\tau(n) := \sum_{d|n} 1$, die Anzahl der (positiven) Teiler von n, ist, wie wir zeigen werden, multiplikativ.

Definition 2.5.3. Seien f und g arithmetische Funktionen. Unter der <u>Faltung</u> $f \star g$ von f und g versteht man die arithmetische Funktion

$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Unter der <u>Summe</u> $f + g$ von f und g versteht man die arithmetische Funktion

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n).$$

Beispiel 2.5.1. Es ist $\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} 1(d) \cdot 1(\frac{n}{d})$, also $\tau = 1 \star 1$.

Satz 2.5.1. *Die Menge A aller arithmetischen Funktionen bildet mit der Addition und der Faltung als Multiplikation einen kommutativen Ring mit Einselelement ϵ.*

Beweis. Die Menge A bildet offenbar unter der Addition von Funktionen eine abelsche Gruppe. Das Distributivgesetz $f \star (g + h) = (f \star g) + (f \star h)$ ist klar.
Es bleibt die Kommutativität und Assoziativität der Faltung zu zeigen, sowie daß ϵ Einselement ist:

- Es ist $(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$. Durchläuft d alle Teiler von n, so auch $d' = \frac{n}{d}$. Also ist

$$(f \star g)(n) = \sum_{d'|n} f\left(\frac{n}{d'}\right) g(d') = (g \star f)(n).$$

- Seien f, g, h arithmetische Funktionen. Dann ist

$$\begin{aligned}((f \star g) \star h)(n) &= \sum_{d|n} (f \star g)(d) \cdot h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} \sum_{d_1|d} f(d_1) g\left(\frac{d}{d_1}\right) h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &\underset{d=d_1 d_2, \frac{n}{d}=d_3}{=} \sum_{\substack{d_1, d_2, d_3 \\ d_1 d_2 d_3 = n}} f(d_1) g(d_2) h(d_3).\end{aligned}$$

  Derselbe Ausdruck ergibt sich für $(f \star (g \star h))(n)$. Also ist $(f \star g) \star h) = f \star (g \star h)$.

- Es ist $(\epsilon \star g)(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) f(\frac{n}{d}) = \epsilon(1) f(n) = f(n)$. Also ist $\epsilon \star f = f$.

□

Satz 2.5.2. *Die Faltung zweier multiplikativer Funktionen ist multiplikativ.*

Beweis. Es seien $f, g \in A$ multiplikativ und $F = f \star g$. Sei $ggT(m, n) = 1$. Dann ist

$$F(mn) = \sum_{\substack{d_1, d_2 \\ d_1 d_2 = mn}} f(d_1) g(d_2).$$

Wir schreiben $d_1 = e_1 e_2$ mit $e_1 = ggT(d_1, m)$ und $e_2 = ggT(d_1, n)$ sowie $d_2 = e_3 e_4$ mit $e_3 = ggT(d_2, m)$ und $e_4 = ggT(d_2, n)$. Dies ist bei gegebenem d_1 und d_2 auf genau eine Art möglich. Dann ist $e_1 e_3 = m$ und $e_2 e_4 = n$.
Also ist wegen der Multiplikativität von f und g

$$\begin{aligned}F(mn) &= \sum_{\substack{e_1, e_2, e_3, e_4 \\ e_1 e_3 = m, e_2 e_4 = n}} f(e_1 e_2) g(e_3 e_4) \\ &= \sum_{\substack{e_1, e_2, e_3, e_4 \\ e_1 e_3 = m, e_2 e_4 = n}} f(e_1) f(e_2) g(e_3) g(e_4) \\ &= \sum_{\substack{e_1, e_3 \\ e_1 e_3 = m}} f(e_1) g(e_3) \sum_{\substack{e_2, e_4 \\ e_2 e_4 = n}} f(e_2) g(e_4) = F(m) \cdot F(n).\end{aligned}$$

□

Satz 2.5.3. *Die Teilerfunktion ist multiplikativ.*

Beweis. Aus Satz 2.5.2 ergibt sich mit $d = 1 \star 1$ ein Beweis für die Multiplikativität der Teilerfunktion.
□

Beispiel 2.5.2. Es sei $\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k$. Es ist $\sigma_k = f \star 1$ mit $f(n) = n^k$: Nach Satz 2.5.2 ist σ_k multiplikativ.

Satz 2.5.4. *Es ist $\mu \star 1 = \epsilon$.*

Beweis. Nach Satz 2.5.2 ist $\mu \star 1$ multiplikativ. Es bleibt, die Werte von $\mu \star 1$ für Primzahlpotenzen zu bestimmen: Für $\alpha \geq 1$ ist

$$(\mu \star 1)(p^\alpha) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \mu\left(p^\beta\right) = 1 + \mu(p) = 0.$$

Also ist $\mu \star 1 = \epsilon$. □

Satz 2.5.5. *(Möbiussche Umkehrformel)*
Seien f und g arithmetische Funktionen. Die folgenden Beziehungen sind äquivalent:

1. $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

2. $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

Beweis. "$\Rightarrow$":
Nach der Definition der Faltung haben wir $F = 1 \star f$. Daraus folgt nach Satz 2.5.1 und 2.5.4

$$\mu \star F = \mu \star (1 \star f) = (\mu \star 1) \star f = \epsilon \star f = f.$$

Also ist $\sum_{d|n} \mu(d) F(\frac{n}{d}) = f(n)$.

"$\Leftarrow$":
Es ist also $\mu \star F = f$. Dann ist

$$f \star 1 = 1 \star (\mu \star F) = (1 \star \mu) \star F = \epsilon \star F = F,$$

also $\sum_{d|n} f(d) = F(n)$. □

Satz 2.5.6. *(2. Möbiussche Umkehrformel)*
Die Funktionen F und G seien auf $[1, \infty)$ definiert. Die folgenden Beziehungen sind äquivalent:

1. $F(x) = \sum_{n \leq x} G\left(\frac{x}{n}\right)$ *für* $x \geq 1$

2. $G(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right)$ *für* $x \geq 1$

Beweis. "$\Rightarrow$":
Für $x \geq 1$ gilt

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \sum_{m \leq x/n} G\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{k \leq x} G\left(\frac{x}{k}\right) \sum_{mn=k} \mu(m).$$

Nach Satz 2.5.4 hat die innere Summe den Wert $\epsilon(k)$.
Daher ist $\sum_{n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) = G(x)$.

"$\Leftarrow$":
Für $x \geq 1$ gilt

$$\sum_{n\leq x} G\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n\leq x}\sum_{m\leq x/n} \mu(m) F\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{k\leq x} F\left(\frac{x}{k}\right) \sum_{mn=k} \mu(m).$$

Wie oben folgt dann: $\sum_{n\leq x} G\left(\frac{x}{n}\right) = F(x)$. □

Definition 2.5.4. Es sei f eine arithmetische Funktion. Für alle $s \in \mathbb{C}$, für die $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ konvergiert, heißt $F(s)$ die Erzeugende Dirichletreihe von f.

Satz 2.5.7. *Seien f, g, h arithmetische Funktionen, so daß $h = f \star g$ ist. Die Erzeugenden Dirichletreihen seien F, G, H. Falls F und G in $s_0 \in \mathbb{C}$ absolut konvergieren, so ist für dieses s_0 auch H absolut konvergent, und es ist $H(s_0) = F(s_0)G(s_0)$.*

Beweis. Nach dem Großen Umordnunggsatz ist

$$\begin{aligned} F(s_0)G(s_0) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(k)k^{-s_0}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} g(m)m^{-s_0}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{km=n} f(k)g(m)(km)^{-s_0}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} h(n)n^{-s_0} = H(s_0), \end{aligned}$$

und letztere unendliche Reihe ist absolut konvergent. □

Ist die Funktion f multiplikativ, so kann die Erzeugende Dirichletreihe von f unter gewissen Voraussetzungen als sogenanntes Eulerprodukt dargestellt werden.

Satz 2.5.8. *Sei f eine multiplikative Funktion und $s \in \mathbb{C}$. Ist $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ absolut konvergent, so ist*

$$F(s) = \prod_p \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} f\left(p^\alpha\right) p^{-\alpha s}\right).$$

Beweis. Aus der absoluten Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ folgt die Konvergenz von $\sum_p \sum_{\alpha\geq 1} \left|f(p^\alpha)p^{-\alpha s}\right|$ und daraus die Konvergenz des unendlichen Produkts $M := \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} f(p^\alpha)p^{-\alpha s}\right)$. Sei $p^+(n)$ der größte Primfaktor von n. dann gilt für alle $x \geq 1$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} - \prod_{p\leq x}\sum_{\alpha=0}^{\infty} f(p^\alpha)p^{-\alpha s}\right| = \left|\sum_{p^+(n)>x} f(n)n^{-s}\right| \leq \sum_{n>x} |f(n)n^{-s}|.$$

Daraus folgt die Behauptung, wenn $x \to \infty$. □

Bemerkung 2.5.1. Ist f vollständig multiplikativ, so nimmt das Produkt die einfache Form $\prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}$ an.

2.6 Die Riemannsche Zeta-Funktion

Definition 2.6.1. Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ ist durch

$$\zeta(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

für $\sigma > 1$ definiert.

Satz 2.6.1. *Die Riemannsche Zeta-Funktion stellt für $\sigma > 1$ eine holomorphe Funktion dar. Sie besitzt dort das Eulerprodukt*

$$\zeta(s) \;=\; \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\,.$$

Insbesondere ist $\zeta(s) \neq 0$, und es ist $\zeta^{-1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s}$.

Beweis. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$$

konvergiert für $\sigma > 1$. Die Existenz des Eulerprodukts wird wie im reellen Fall (Satz 2.1.1) bewiesen. Aus den Sätzen 2.5.4 und 2.5.7 folgt

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon(n) n^{-s} = 1.$$

□

Die Untersuchung der Primzahlverteilung wird durch die Tatsache ermöglicht, daß die Zeta-Funktion meromorph fortgesetzt werden kann. In einem ersten Schritt setzen wir sie auf den Bereich $\{\sigma > 0\}$ fort.

Satz 2.6.2. *Die Riemannsche Zeta-Funktion läßt sich meromorph fortsetzen auf den Bereich $\{\sigma > 0\}$. Die einzige Singularität ist ein Pol erster Ordnung in $s = 1$ mit Residuum 1.*

Beweis. Anwendung der Eulerschen Summenformel (Satz 2.3.2) für $\Re(s) > 1$ und $\epsilon > 0$ beliebig klein ergibt

$$\begin{aligned}
\zeta(s) \quad &= \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \int_{1-\epsilon}^{\infty} u^{-s}\,du + s\int_{1-\epsilon}^{\infty} P_0(u) u^{-s-1}\,du + (1-\epsilon)^{-s}\cdot P_0(1-\epsilon) \\
&\underset{\epsilon\to 0}{=} \quad \int_1^{\infty} u^{-s}\,du + s\int_1^{\infty} P_0(u)u^{-s-1}\,du + \frac{1}{2} \\
&= \quad \frac{1}{s-1} + s\int_1^{\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}}{u^{s+1}}\,du + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Wegen $|P_0(u)| = |u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{2}$ ist die Folge

$$\int_1^N \frac{u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}}{u^{s+1}}\,du$$

kompakt konvergent in der Halbebene $\Re(s) > 0$. Also stellt

$$s\int_1^\infty P_0(u)u^{-s-1}\,du$$

eine in $\Re(s) > 0$ holomorphe Funktion dar. Die übrigen Summanden sind dort ebenfalls holomorph, außer in $s = 1$, da dort $\frac{1}{s-1}$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum eins aufweist. □

2.7 Fouriertheorie und Poissonsche Summenformel

Wir behandeln nun einige Einzelheiten der Theorie der Fourierreihen auf $G = \mathbb{C}^*$.
Die Grundideen zentraler Definitionen, wie z. B. des Dirichletkerns werden durch Vergleich mit dem in Kapitel I behandelten Fall der endlichen abelschen Gruppen G deutlicher.
Jede Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit Periode 1 kann durch die Definition $f(x) = \tilde{f}(e(x))$ mit einer Funktion auf $\mathbb{C}^*$ identifiziert werden. Es stellt sich die Farge, wann f durch seine in Kapitel I definierte Fourierreihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e(nx)$ mit den Fourierkoeffizienten $\hat{f} = \int_0^1 f(x)e(-nx)\,dx$ dargestellt wird.
Für $q \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Partition $I_q := \left\{\frac{r}{q}\colon 0 \le r \le q-1\right\}$ des Intervalls $I = [0,1]$. Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ kann zunächst durch Restiktion mit der Funktion $f_{(q)}\colon I_q \to \mathbb{C}$ mit $\frac{r}{q} \to f(\frac{r}{q})$ auf I_q verglichen werden. Diese kann wiederum mit der Funktion $f_{disc}\colon (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}),+) \to \mathbb{C},\ r \bmod q \to f(\frac{r}{q})$, die auf $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}),+)$ definiert ist, identifiziert werden.
Approximiert man in der Darstellung $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e(-nx)\,dx$ das Integral durch die zur Partition I_q gehörende Riemannsche Summe, so ergeben sich gerade die in Definition 1.2.3 definierten Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}_{disc}(e_n) = \frac{1}{q}\sum_{r=0}^{q-1} f\left(\frac{r}{q}\right)e\left(-\frac{nr}{q}\right) = \frac{1}{q}\sum_{r \bmod q} f_q(r \bmod q)\overline{e_n(r \bmod q)}.$$

Nach Satz 1.2.4 besitzt f die Darstellung

$$f_{disc} = \sum_{k=0}^{q-1} f(k \bmod q)E_k \tag{1}$$

mit der "Standardbasis"

$$E_k(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } \ r \bmod q = k \bmod q \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Nach der Orthogonalitätsrelation 2. Art ist

$$E_k(r \bmod q) = \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{q-1} e\left(n\left(\frac{r}{q}-\frac{k}{q}\right)\right). \tag{2}$$

Aus (3) und (4) ergibt sich die Darstellung

$$f\left(\frac{r}{q}\right) = \sum_{k=0}^{q-1} f\left(\frac{k}{q}\right)D_{disc}\left(\frac{r}{q}-\frac{k}{q}\right) \tag{3}$$

mit dem "diskreten Dirichletkern"

$$D_{disc}\left(\frac{l}{q}\right) = \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{q-1} e\left(n\frac{l}{q}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } \ l = 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{4}$$

Dieser Vergleich legt nahe, bei der Untersuchung des Falls $G = \mathbb{C}^*$ den Dirichletkern $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e(nx)$ zugrunde zu legen.

Definition 2.7.1. Es sei $N \in \mathbb{Z}$. Der N- te Dirichletkern D_N ist durch

$$D_N(x) = \sum_{|n| \leq |N|} e(nx)$$

gegeben. Für $N \geq 0$ ist der n- te Fejérkern F_N durch

$$F_N(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} D_N(x)$$

gegeben.

Eine erste Parallele zwischen "diskretem Dirichletkern" und Dirichletkern liefert der nächste Satz. Während der "diskrete Dirichletkern" in (2) völlig in einem Punkt des Definitionsbereiches konzentriert ist, ist der Dirichletkern D_N weitgehend in einer beliebig klein werdenden Umgebung (für $N \to \infty$) von $x = 0$ konzentriert. Diese Konzentration ist beim Fejérkern noch stärker ausgeprägt.

Satz 2.7.1. *Es sei $N \in \mathbb{N}_0$ und $x \in (-1/2, 1/2)$. Es gelten für $x \neq 0$ die Darstellungen*

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{e((N+1/2)x) - e(-(N+1/2)x)}{e(1/2x) - e(-1/2x)} \quad \text{und} \\ F_N(x) &= \frac{1}{2N+1} \left(\frac{e((N+1/2)x) - e(-(N+1/2)x)}{e(1/2x) - e(-1/2x)} \right)^2 \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{N-|n|}{N+1/2} e(nx). \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} D_N(x) &= \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \neq 0 \end{cases} \quad \text{und} \\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} F_N(x) &= \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

sowie $F_N(x) \geq 0$ für alle x und $\int_{-1/2}^{1/2} F_N(x)\,dx = 1$.
Es gibt eine absolute Konstante $C > 0$, so daß

$$\int_{\substack{-1/2 \\ |x| \geq \delta}}^{1/2} F_N(x)\,dx \leq CN^{-1}\delta^{-2}.$$

Insbesondere gilt bei festem $\delta > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\substack{-1/2 \\ |x| \geq \delta}}^{1/2} F_N(x)\,dx = 0.$$

Beweis. Einsetzen der Formel für die endliche geometrische Reihe ergibt

$$\begin{aligned} D_N(x) &= e(-Nx)\sum_{n=0}^{2N} e(nx) = e(-Nx)\frac{e((2N+1)x)-1}{e(x)-1} \\ &= \frac{e((N+1/2)x)-e(-(N+1/2)x)}{e(1/2x)-e(-1/2x)}. \end{aligned}$$

Die Darstellung für den Fejérkern ergibt sich durch eine analoge Rechnung. Die Voraussetzung $x \neq 0$ ist notwendig, da sonst die Nenner $e(1/2x) - e(-1/2x)$ und $e(x) - 1$ verschwinden. Man sieht aber, daß sich alle Ausdrücke stetig nach $x = 0$ fortsetzen lassen. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} F_N(x)\,dx &= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{|j|\le|n|} e(jx) \right) dx \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left(\sum_{\substack{j=-n \\ j\neq 0}}^{n} \int_{-1/2}^{1/2} e(jx)\,dx + \int_{-1/2}^{1/2} 1\,dx \right) \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left(\sum_{\substack{|j|\le|n| \\ j\neq 0}} \left[\frac{e(jx)}{2\pi i j} \right]_{-1/2}^{1/2} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 1 = 1. \end{aligned}$$

Für $x \in [\delta, 1/2]$ gilt nach der Euler- Identität $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ und der Monotonie des Sinus auf $[0, \pi/2]$ die Abschätzung

$$|F_N(x)| = \frac{1}{2N+1} \left| \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} \right|^2 \le \frac{1}{2N+1} \cdot \frac{1}{\sin(\pi\delta)^2}.$$

Daraus folgt für jedes feste $\delta \in (0, 1/2)$ der Übergang

$$\int_{\delta}^{1/2} F_N(x)\,dx \le \frac{1/2-\delta}{2N+1} \cdot \frac{1}{\sin(\pi\delta)^2}.$$

Die Überlegungen gelten analog für das Intervall $(-1/2, -\delta)$. □

Es ist nun möglich, die Partialsummen $S_f(x, N)$ mittels des Dirichletkerns D_N darzustellen. Die arithmetischen Mittel der Partialsummen können dann mittels der Fejérkerne dargestellt werden.

Satz 2.7.2. *Es sei $N \in \mathbb{N}_0$. Dann ist*

$$S_f(x, N) = \int_0^1 f(t) D_N(x-t)\,dt,$$

sowie

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} S_f(x, n) = \int_0^1 f(t) F_N(x-t)\,dt.$$

Beweis. Es gilt

$$\int_0^1 f(t) D_N(x-t)\, dt = \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_0^1 f(t) e(-nt)\, dt \right) e(nx) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e(nx) = S_f(x, N).$$

□

Satz 2.7.3. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig-differenzierbar mit Periode 1, dann gilt*

$$\lim_{N\to\infty} S_f(x, N) \;=\; f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Behauptung gilt auch schon, wenn f nur einmal stetig-differenzierbar ist, erfordert aber zu ihrem Beweis größeren Aufwand.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n)$ schnell gegen null streben: Zweimalige partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) \;&=\; \int_0^1 f(t) e(-nt) dt \;=\; \underbrace{\left[f(t) \frac{e(-nt)}{-2\pi i n} \right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 f'(t) e(-nt) dt \\ &=\; -\frac{1}{4\pi^2 n^2} \int_0^1 f''(t) e(-nt) dt \;=\; O\left(\tfrac{1}{n^2}\right) \quad (n \to \infty)\,. \end{aligned}$$

Damit konvergieren die Partialsummen gleichmäßig

$$S_f(x, N) \;=\; \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e(nx) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} g(x) \tag{1}$$

gegen eine Grenzfunktion $g(x)$, und es bleibt $f(x) = g(x)$ zu zeigen. Aus (3) folgt, daß auch die Folge der arithmetischen Mittel der $S_f(x, N)$ gegen $g(x)$ konvergiert:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{|n|\le N} S_f(x, n) \;=\; g(x)\,. \tag{2}$$

Nach den Sätzen 2.7.1 und 2.7.2 folgt für festes $\delta > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{|n|\le N} S_f(x, n) = \lim_{N\to\infty} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t) F_N(x-t) dt = \lim_{N\to\infty} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) F_N(x-t) dt. \tag{3}$$

Wegen der Stetigkeit von f für $t = x$ können wir zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so bestimmen, daß $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ ist für $|x - t| < \delta$. Mit (4) und (1) folgt

$$|g(x) - f(x)| \;\le\; \varepsilon \cdot \int_{x-\delta}^{x+\delta} F_N(x-t) dt \;\le\; \varepsilon$$

und folglich $g(x) = f(x)$ überall. □

Definition 2.7.2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrierbar mit

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \ < \ \infty \, .$$

Dann nennt man

$$\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \ , \ \ \hat{f}(u) \ = \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e(-ut) dt$$

die <u>Fouriertransformierte</u> von f.

Satz 2.7.4. *(Poissonsche Summenformel)*
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig-differenzierbar und mit einer Konstanten $C > 0$ gelte

$$|f(x)| \ + \ |f'(x)| \ + \ |f''(x)| \ \leq \ C \cdot \frac{1}{1+x^2} \, . \tag{1}$$

Dann ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \, .$$

Beweis. Die Funktion

$$F(x) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

besitzt offenbar die Periode 1. Wegen der Bedingung (1) konvergiert auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x+k)$$

gleichmäßig für $m = 0, 1, 2$. Also ist $F(x)$ zweimal stetig-differenzierbar. Nach Satz 2.7.3 konvergiert die Fourierreihe $S_F(x, N)$ gleichmäßig gegen $F(x)$, also

$$\begin{aligned} F(x) \ &= \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}(n) e(nx) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_0^1 F(t) e(-nt) dt \right) e(nx) \\ &= \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_0^1 f(t+k) e(-n(t+k)) dt \right) e(nx) \\ &= \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_k^{k+1} f(t) e(-nt) dt \right) e(nx) \\ &= \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e(-nt) dt \right) e(nx) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e(nx) \, . \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun, wenn wir $x = 0$ einsetzen. $\square$

2.8 Die Gamma-Funktion

Definition 2.8.1. Die Gamma-Funktion Γ ist über

$$\Gamma(z) \;=\; \int\limits_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

mit $t^{z-1} = \exp((z-1)\log(t))$ definiert.

Satz 2.8.1. *Die Gamma-Funktion $\Gamma(z)$ ist für $\Re(z) > 0$ holomorph, und auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzbar. Sie besitzt Pole genau in den Stellen $\{0, -1, -2, -3, \ldots\}$. Es sind Pole erster Ordnung, das Residuum in $-n$ ist $\frac{(-1)^n}{n!}$. Die Funktion$\Gamma(z)$ genügt der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, und es ist $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Die Folge

$$I_n \;=\; \int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} t^{z-1} e^{-t} dt$$

ist für $\Re(z) > 0$ kompakt konvergent und besitzt daher eine holomorphe Grenzfunktion $\Gamma(z)$. Durch partielle Integration erhalten wir für $\Re(z) > 0$

$$\Gamma(z+1) \;=\; \int\limits_0^\infty t^z e^{-t} dt \;=\; \left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty \;+\; z \int\limits_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \;=\; z \cdot \Gamma(z)$$

und damit durch Induktion

$$\Gamma(z) \;=\; \frac{\Gamma(z+n+1)}{z \cdot (z+1) \cdots (z+n)} \,. \tag{1}$$

Die rechte Seite ist nun meromorph für $\Re(z) > -(n+1)$ und ist dort holomorph bis auf die Nullstellen $\{0, -1, -2, \ldots\}$ des Nenners, die Pole erster Ordnung konstituieren. Da n beliebig gewählt werden kann, ergibt sich die meromorphe Fortsetzbarkeit in die gesamte komplexe Ebene. Es ist

$$\Gamma(1) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-t} dt \;=\; 1$$

woraus mit (2) die Darstellung $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$ folgt. Das Residuum des Pols in $z = -n$ ergibt sich aus (2) zu

$$\underset{z=-n}{Res}(\Gamma) \;=\; \lim_{z \to -n} \left((z+n) \cdot \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)} \right) \;=\; \frac{(-1)^n}{n!} \,.$$

□

Satz 2.8.2. *Für $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ gilt*

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) \;=\; \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \,.$$

Beweis. Für $\Re(z) > 0$ haben wir

$$|\Gamma(z)| \;\le\; \int\limits_0^\infty |t^{z-1}| e^{-t} dt \;=\; \int\limits_0^\infty t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t} dt \;=\; \Gamma(\Re(z)) \,.$$

Daher ist $\Gamma(z)$ in jedem Vertikalstreifen $\{z \ : \ \delta \leq \Re(z) \leq b\}$ mit $0 < \delta < b$ beschränkt. Aus der Rekursion

$$\Gamma(z) \ = \ \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

folgt dann, daß $\Gamma(z)$ auch auf jeder Menge der Gestalt

$$\{z : \ a < \mathrm{Re}(z) \leq b \,, \ |\mathrm{Im}(z)| \geq 1\} \tag{1}$$

beschränkt ist. Wir betrachten nun die Funktion

$$f(z) \ = \ \Gamma(z)\Gamma(1-z) \ - \ \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

im Vertikalstreifen $V = \{z \ : \ 0 \leq \Re(z) \leq 2\}$. In der Menge $V_1 = V \cap \{\mathrm{Im}(z) \geq 1\}$ der Gestalt (3) ist $f(z)$ beschränkt. Die Funktionen $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ und $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ haben in den Stellen $z = 0, 1, 2$ Pole erster Ordnung mit denselben Residuen. Damit ist f im Vertikalstreifen V holomorph in V sogar beschränkt, da $V - V_1$ kompakt ist. Da f die Periode 2 besitzt ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph aber auch beschränkt, und daher nach dem Satz von Liouville konstant. Wegen $f(-z) = -f(z)$ bleibt nur $f(z) = 0$, woraus die Behauptung folgt. □

Satz 2.8.3. *Die Gamma-Funktion* $\Gamma(z)$ *hat keine Nullstellen, d.h.* $\frac{1}{\Gamma(z)}$ *ist eine ganze Funktion.*

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 2.8.1 und 2.8.2. □

2.9 Die Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion

Mittels der Funktionalgleichung kann die Riemannsche Zeta-Funktion, die wir bereits in die Halbebene $\Re(s) > 0$ meromorph fortgesetzt haben, in die gesamte komplexe Ebene meromorph fortgesetzt werden. In dieser Funktionalgleichung tritt auch die Gamma-Funktion auf.

Definition 2.9.1. Die Theta-Reihe und die Psi-Reihe $\vartheta, \psi : \ (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sind durch

$$\vartheta(x) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \ \ , \ \ \psi(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \ = \ \frac{1}{2}(\vartheta(x) - 1)$$

definiert.

Lemma 2.9.1. *Die Reihen* $\vartheta(x)$ *und* $\psi(x)$ *sind zweimal stetig-differenzierbar in* $(0, \infty)$*. Die unendliche Reihe* $\psi(x)$ *konvergiert gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall von* $(0, \infty)$*.*

Beweis. Es sei $M > 1$ beliebig. Auf $[M^{-1}, M]$ haben die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \ \ \text{bzw.} \ \ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi e^{-n^2\pi x} \ \ \text{bzw.} \ \ \sum_{n=1}^{\infty} n^4\pi^2 e^{-n^2\pi x}$$

die konvergenten Majoranten

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi M^{-1}} \ \ \text{bzw.} \ \ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi e^{-n^2\pi M^{-1}} \ \ \text{bzw.} \ \ \sum_{n=1}^{\infty} n^4\pi^2 e^{-n^2\pi M^{-1}} \ .$$

Daraus folgt, daß die beiden ersten Ableitungen durch gliedweises Ableiten erhalten werden können sowie die Stetigkeit der beiden ersten Ableitungen. Entsprechendes gilt für $\vartheta(x) = 2\psi(x) + 1$. □

Lemma 2.9.2. *Die Funktionen $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ erfüllen für $x > 0$ die Funktionalgleichungen*

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \vartheta\left(\tfrac{1}{x}\right) \tag{1}$$

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(2\psi\left(\tfrac{1}{x}\right) + 1\right) \tag{2}$$

sowie die Abschätzungen

$$\psi(x) = O\left(\tfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad (x \to 0+) \tag{3}$$

$$\psi(x) = O\left(e^{-\pi x}\right) \quad (x \to \infty)\,. \tag{4}$$

Beweis. Es genügt (4) zu zeigen, denn (2) folgt aus (4), (4) folgt aus der Reihendarstellung von $\psi(x)$, und (3) folgt aus (2) und (4). Wir wenden dazu auf $\vartheta(x)$ die Poissonsche Summenformel (Satz 2.7.4) an: es ist

$$\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \ \text{ mit } \ f(t) = e^{-t^2\pi x}\,.$$

Die Bedingung (1) von Satz 2.7.4

$$|f(t)| + |f'(t)| + |f''(t)| \le C \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

ist offenbar erfüllt. Zur Berechnung der Fouriertransformierten $\hat{f}$ verwenden wir die bekannte Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}\,.$$

Die Substitution $t \mapsto t \cdot \sqrt{\pi x}$ ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\pi x} dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Verschiebung des Integrationswegs $(-\infty, \infty)$ auf $(-\infty + iy, \infty + iy)$ für festes $y \in \mathbb{R}$ mittels des Cauchyschen Integralsatzes ergibt

$$\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} e^{-t^2\pi x} dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\hat{f}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2\pi x)\exp(-2\pi i u t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi x(t + \tfrac{iu}{x})^2 - \pi\tfrac{u^2}{x}\right) dt \\ &= \int_{-\infty+\frac{iu}{x}}^{\infty+\frac{iu}{x}} \exp\left(-t^2\pi x\right) dt \cdot \exp(-\pi\tfrac{u^2}{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \exp\left(-\pi\tfrac{u^2}{x}\right)\end{aligned}$$

und damit

$$\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \vartheta\left(\tfrac{1}{x}\right)\,.$$

□

Lemma 2.9.3. *Für $\sigma > 1$ gilt*

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) \;=\; \int_0^\infty \psi(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx \,.$$

Beweis. Es sei $M > 1$ beliebig. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\psi(x)$ auf $[M^{-1}, M]$ haben wir

$$\int_{M^{-1}}^{M} \psi(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M^{-1}}^{M} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \,. \tag{1}$$

Aus den Schranken $\psi(x) = O(\frac{1}{\sqrt{x}})$ für $x \to 0+$ bzw. $\psi(x) = O(e^{-\pi x})$ für $x \to \infty$ (Lemma 2.9.2) folgt für die Summanden

$$\lim_{M\to\infty} \int_{M^{-1}}^{M} x^{\frac{1}{2}s-1} \psi(x) dx \;=\; \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1} \psi(x) dx \,. \tag{2}$$

Wir führen den Grenzübergang auf der rechten Seite von (1) im Integral aus: Es sei $\delta = \delta(\sigma) > 0$ so gewählt, daß $\frac{1}{2}\sigma(2-\delta) > 1$ ist (das ist möglich, da $\sigma > 1$ ist), und schätzen

$$\int_0^{M^{-1}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx$$

ab. Für $n \le M^{\frac{1}{2-\delta}}$ erhalten wir

$$\int_0^{M^{-1}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \;=\; O_\sigma\left(M^{-\frac{1}{2}\sigma}\right)$$

und damit

$$\sum_{n \le M^{\frac{1}{2-\delta}}} \left| \int_0^{M^{-1}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \right| \;=\; O_\sigma\left(M^{\frac{1}{2-\delta}-\frac{1}{2}\sigma}\right) \,, \tag{3}$$

die Summe geht also gegen Null für $M \to \infty$, da $\frac{1}{2-\delta} - \frac{1}{2}\sigma < 0$ ist. Für $n > M^{\frac{1}{2-\delta}}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{M^{-1}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \right| \;&\le\; \left| \int_0^{n^{-(2-\delta)}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \right| + \left| \int_{n^{-(2-\delta)}}^{M^{-1}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \right| \\ &=\; O_\sigma\left(n^{-\frac{1}{2}\sigma(2-\delta)}\right) \;+\; O_\sigma\left(\exp(-n^\delta) M^{-\frac{1}{2}\sigma}\right) \end{aligned}$$

durch Abschätzung der Faktoren der Integranden. Es folgt

$$\sum_{n > M^{\frac{1}{2-\delta}}} \left| \int_0^{M^{-1}} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \right| \;\underset{M\to\infty}{\longrightarrow}\; 0 \,, \tag{4}$$

weiter strebt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_M^\infty x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \right| \;=\; O_\sigma\left(M^{\frac{1}{2}\sigma} e^{-\pi M}\right) \tag{5}$$

gegen null für $M \to \infty$. Aus (3), (4) und (5) folgt

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M^{-1}}^{M} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x} dx$$

$$\underset{t=n^2\pi x}{=} \; \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \right) \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}s-1} dt \;=\; \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s)\,.$$

Damit und mit (1) und (2) folgt die Behauptung. □

Satz 2.9.1 (Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion)**.** *Die Riemannsche Zeta-Funktion besitzt eine Fortsetzung in die ganze komplexe Ebene mit einem Pol erster Ordnung und Residuum eins in $s = 1$. Die vollständige Zeta-Funktion*

$$\xi(s) \;=\; \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \zeta(s)$$

erfüllt die Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$. Es besitzt $\zeta(s)$ keine Nullstellen für $\Re(s) > 1$ und für $\Re(s) < 0$ genau die Nullstellen $-2, -4, -6, \ldots$. Für die Nullstellen im kritischen Streifen $\{0 \leq \Re(s) \leq 1\}$ gilt $\zeta(s) = 0 \Leftrightarrow \zeta(1-s) = 0$.

Beweis. Nach den Lemmata 2.9.2 und 2.9.3 gilt für $\sigma > 1$

$$\begin{aligned}
\xi(s) \;&=\; \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\psi(x)dx \;=\; \int_0^1 x^{\frac{1}{2}s-1}\psi(x)dx \;+\; \int_1^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\psi(x)dx \\
&=\; \int_0^1 x^{\frac{1}{2}s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right) dx \;+\; \int_1^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\psi(x)dx \\
&=\; \frac{1}{s-1} \;-\; \frac{1}{s} \;+\; \int_0^1 x^{\frac{1}{2}s-\frac{3}{2}}\psi\left(\tfrac{1}{x}\right) dx \;+\; \int_1^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\psi(x)dx \\
&=\; \frac{1}{s(s-1)} \;+\; \int_1^\infty \left(x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}s-1}\right)\psi(x)dx\,.
\end{aligned}$$

Wegen $\psi(x) = O(e^{-\pi x})$ nach Lemma 2.9.2 ist die Folge

$$I(N,s) \;=\; \int_1^N \left(x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}s-1}\right)\psi(x)dx$$

kompakt konvergent in $\mathbb{C}$, und

$$I(s) \;=\; \int_1^\infty \left(x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}s-1}\right)\psi(x)dx$$

stellt eine ganze Funktion dar. Die Funktion $\xi(s)$ ist damit holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ und erfüllt offenbar die Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$. Damit gilt auch $\xi(s) = 0 \Leftrightarrow \xi(1-s) = 0$. Da $\xi(s) \neq 0$ für $\sigma > 1$ ist folgt $\xi(s) \neq 0$ für $\sigma < 0$. Wegen $\Gamma(\frac{s}{2}) \neq 0$ auf $\mathbb{C}$ (Satz 2.8.3) besitzt $\zeta(s)$ Nullstellen in den Polstellen von $\Gamma(\frac{s}{2})$ mit Ausnahme von $s = 0$, nach Satz 2.8.1 also in $-2, -4, -6, \ldots$ wie behauptet. □

2.10 Die Koeffizientensumme einer Dirichletreihe

Entscheidend für den funktionentheoretischen Beweis des Primzahlsatzes ist die Möglichkeit, die Koeffizientensummen von Dirichletreihen durch Kurvenintegrale auszudrücken, die wir hier behandeln wollen.

Satz 2.10.1. *Es sei*

$$D(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

für $\sigma > 1$ absolut konvergent. Mit einer für $x \geq x_0$ monoton wachsenden und positiven Funktion $\Phi(x)$ und einer Konstanten $C > 0$ sei $|a_n| < C \cdot \Phi(x)$ für alle $n \leq x$. Es sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} \;=\; O\left((\sigma-1)^{-\alpha}\right) \quad (\sigma \to 1+)$$

für ein festes $\alpha > 0$ sowie $c > 1$, $x > 1$, $x \notin \mathbb{Z}$ sowie $T > 0$, dann gilt

$$\sum_{n \leq x} a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-iT}^{c+iT} D(s) \frac{x^s}{s} ds \;+\; O\left(\frac{x^c}{T \cdot (c-1)^{\alpha}}\right) \;+\; O\left(\frac{x \cdot \Phi(2x) \cdot \log(2x)}{T}\right) \;+\; O\left(\frac{x \cdot \Phi(2x)}{T \cdot \|x\|}\right)$$

für $T \to \infty$, wobei $\|x\|$ den Abstand von x zur nächsten ganzen Zahl bedeute.

Zur Vorbereitung beweisen wir

Lemma 2.10.1. *Es sei $c > 0$, $T > 0$ und $y > 0$, dann ist für $T \to \infty$*

$$\int\limits_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds = \begin{cases} 1 + O(\frac{y^c}{T \cdot |\log(y)|}), & \text{falls} \quad y > 1, \\ O(\frac{y^c}{T \cdot |\log(y)|}), & \text{falls} \quad 0 < y < 1 \end{cases}$$

Beweis. Es sei $y > 1$. Für $U > 0$ ist nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{-U-iT}^{c-iT} \frac{y^s}{s} ds \;+\; \int\limits_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds \;+\; \int\limits_{c+iT}^{-U+iT} \frac{y^s}{s} ds \;+\; \int\limits_{-U+iT}^{-U-iT} \frac{y^s}{s} ds \right) \;=\; \underset{s=0}{Res} \left(\tfrac{y^s}{s}\right) \;=\; 1$$

wenn im positiven Sinn über die geradlinigen Verbindungsstrecken integriert wird. Es ist

$$\left| \int\limits_{c+iT}^{-U+iT} \frac{y^s}{s} ds \right| \;\leq\; \frac{1}{T} \int\limits_{-\infty}^{c} y^{\sigma} d\sigma \;=\; O\left(\frac{y^c}{T \cdot |\log(y)|}\right)$$

und analog

$$\left| \int\limits_{-U-iT}^{c-iT} \frac{y^s}{s} ds \right| \;=\; O\left(\frac{y^c}{T \cdot |\log(y)|}\right) \,.$$

$$\left| \int\limits_{-U-iT}^{-U+iT} \frac{y^s}{s} ds \right| \;=\; O\left(\frac{T y^{-U}}{|\log(y)|}\right) \underset{U \to \infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Also ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}ds \;=\; 1+O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right)\,.$$

Es sei $0<y<1$: Für $U>0$ ist nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{U-iT}^{c-iT}\frac{y^s}{s}ds+\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}ds+\int\limits_{c+iT}^{U+iT}\frac{y^s}{s}ds+\int\limits_{U+iT}^{U-iT}\frac{y^s}{s}ds\right) \;=\; 0\,,$$

wobei wiederum über die geradlinigen Verbindungsstrecken integriert wird. Es ist

$$\left|\int\limits_{c+iT}^{U+iT}\frac{y^s}{s}ds\right| \;\le\; \frac{1}{T}\int\limits_{c}^{\infty}y^\sigma d\sigma \;=\; O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right)\,,\quad \left|\int\limits_{U-iT}^{c-iT}\frac{y^s}{s}ds\right| \;=\; O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right) \text{ sowie}$$

$$\left|\int\limits_{U-iT}^{U+iT}\frac{y^s}{s}ds\right| \;=\; O\left(\frac{T\cdot y^U}{|\log(y)|}\right) \underset{U\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

woraus die Behauptung des Lemmas folgt. □

Beweis von Satz 2.10.1. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$$

auf $[c-iT,c+iT]$ erhalten wir mit Lemma 2.10.1

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}D(s)\frac{x^s}{s}ds \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\left(\tfrac{x}{n}\right)^s ds\right) \;=\; \sum_{n<x}a_n \;+\; O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\right)\,. \tag{1}$$

Wir spalten die Summe

$$\Sigma_0 \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^c\cdot\log|(\frac{x}{n})|}$$

auf in

$$\Sigma_0 \;=\; \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$$

mit

$$\Sigma_1 \;=\; \sum_{n<\frac{x}{2}}\frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\,,\ \Sigma_2 \;=\; \sum_{n>2x}\frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\,,\ \Sigma_3 \;=\; \sum_{\frac{x}{2}\le n\le 2x}\frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\,.$$

Für $n<\frac{x}{2}$ und $n>2x$ ist $|\log(\frac{x}{n})|\ge\log(2)$, also

$$\Sigma_1+\Sigma_2 \;=\; O\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^c}\right) \;=\; O\left((c-1)^{-\alpha}\right) \tag{2}$$

nach Voraussetzung. Wir kommen zum schwierigsten Teil, der Abschätzung von Σ_3. Es sei N eine natürliche Zahl, die x am nächsten liegt. Für $N<n\le 2x$ sei $r=n-N$. Wir haben wegen $x\le N+\frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$\log\left(\tfrac{n}{x}\right) \;\ge\; \log\left(\frac{N+r}{N+\frac{1}{2}}\right) \;=\; \log\left(1+\frac{r-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}}\right)\,.$$

Im folgenden seien $c_0, c_1 > 0$ feste Konstanten. Aus dem Mittelwertsatz schließen wir, daß $\log(1+u) \geq c_0 u$ für $0 \leq u \leq 1$ ist, und erhalten

$$\log\left(1 + \frac{r-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}}\right) \;\geq\; c_0 \frac{r-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}} \;\geq\; c_1 \cdot \frac{r}{x} \,.$$

Also haben wir

$$\sum_{N<n\leq 2x} \frac{|a_n|}{n^c \cdot |\log(\frac{x}{n})|} \;=\; O\left(\Phi(2x) \cdot x^{1-c} \cdot \sum_{1\leq r\leq 2x} \frac{1}{r}\right) \;=\; O\left(\Phi(2x) \cdot x^{1-c} \cdot \log(2x)\right) \,. \tag{3}$$

Analog folgt

$$\sum_{\frac{x}{2}\leq n<N} \frac{|a_n|}{n^c \cdot |\log(\frac{x}{n})|} \;=\; O\left(\Phi(2x) \cdot x^{1-c} \cdot \log(2x)\right) \,. \tag{4}$$

Für $n = N$ erhalten wir

$$\frac{|a_n|}{N^c \cdot |\log(\frac{x}{N})|} \;=\; O\left(\frac{\Phi(N)}{N^c \cdot |\log(1+\frac{x-N}{N})|}\right) \;=\; O\left(\frac{\Phi(2x) \cdot x^{1-c}}{\|x\|}\right) \,. \tag{5}$$

Aus den Abschätzungen (1)-(5) folgt die Behauptung des Satzes. $\square$

2.11 Der Primzahlsatz

Die Primzahlzählfunktion

$$\pi(x) \;=\; \sum_{p\leq x} 1$$

ist eng mit der Koeffizientensumme von $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, der negativen logarithmischen Ableitung der Riemannschen Zeta-Funktion, verknüpft.

Definition 2.11.1. Die Funktion

$$\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\;,\;\; \Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{falls} \quad n = p^m \text{ für eine Primzahl } p, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Mangoldtsche Funktion. Die summatorischen Funktionen

$$\psi(x) \;=\; \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \;\text{ bzw. }\; \vartheta(x) \;=\; \sum_{p\leq x} \log(p)$$

heißen Tschebyscheffsche ψ-Funktion bzw. Tschebyscheffsche ϑ-Funktion.

Lemma 2.11.1. *Es gilt die Asymptotik*

$$\psi(x) - \vartheta(x) \;=\; O\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot \log(x)^2\right) \quad (x \to \infty)\,.$$

Beweis. Es gilt

$$\psi(x) - \vartheta(x) \;=\; \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{p^m\leq x} \log(p) \;\leq\; \left(x^{\frac{1}{2}} + \cdots + x^{\frac{1}{k_0}}\right) \cdot \log(x)\,,$$

wobei k_0 so gewählt ist, daß $\frac{3}{2} < x^{\frac{1}{k_0}} \leq 2$ ist (es ist $k_0 = O(\log(x))$ für $x \to \infty$). Also folgt

$$\psi(x) - \vartheta(x) \;=\; O\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot \log(x)^2\right) \,.$$

$\square$

Satz 2.11.1. *Für $\sigma > 1$ gilt*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}\,.$$

Beweis. Wir betrachten das Eulerprodukt

$$\zeta(s) \;=\; \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

zunächst für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$. Logarithmieren ergibt

$$\log(\zeta(s)) \;=\; -\sum_p \log(1-p^{-s})$$

und Differentiation dann

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_p \frac{\log(p)}{1-p^{-s}} p^{-s} \;=\; \sum_p \left(\sum_{m=1}^{\infty} p^{-ms} \right) \log(p) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}\,.$$

Aus dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt, daß dies für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 1$ gilt. □

Satz 2.11.2. *Der Primzahlsatz*

$$\pi(x) \;=\; \frac{x}{\log(x)} \;+\; o\left(\frac{x}{\log(x)}\right) \quad (x \to \infty) \tag{PZ0a}$$

ist jeweils äquivalent zu den Behauptungen

$$\psi(x) \;=\; x \;+\; o\,(x) \quad (x \to \infty) \tag{PZ0b}$$

$$\vartheta(x) \;=\; x \;+\; o\,(x) \quad (x \to \infty) \tag{PZ0c}$$

für die Tschebyscheffschen Funktionen.

Beweis. Die Behauptungen (PZ0c) und (PZ0b) sind äquivalent nach Lemma 2.11.1, wir zeigen noch die Äquivalenz von (PZ0a) mit (PZ0c):

<u>(PZ0a)⇒(PZ0c):</u>
Mit abelscher partieller Summation (Satz 2.3.1) ist

$$\vartheta(x) \;=\; \sum_{p \le x} \log(p) \;=\; \pi(x)\log(x) - \int_{\frac{3}{2}}^{x} \frac{\pi(t)}{t} dt\,.$$

Es ist

$$\int_{\frac{3}{2}}^{x} \frac{\pi(t)}{t} dt \;\le\; \int_{\frac{3}{2}}^{x^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi(t)}{t} dt \;+\; O\left(\int_{x^{\frac{1}{2}}}^{x} \frac{\pi(t)}{t} dt \right) \;=\; O\left(\frac{x}{\log(x)}\right)\,.$$

Also folgt $\vartheta(x) = x + o(x)$ aus (PZ0a).

(PZ0c)⇒(PZ0a):
Wiederum mit abelscher partieller Summation gilt

$$\pi(x) \;=\; \sum_{p\le x} \frac{\log(p)}{\log(p)} \;=\; \frac{\vartheta(x)}{\log(x)} + \int\limits_{\frac{3}{2}}^{x} \frac{\vartheta(t)}{t\cdot \log(t)^2} dt \;=\; \frac{\vartheta(x)}{\log(x)} + O\left(\int\limits_{\frac{3}{2}}^{x} \frac{dt}{\log(t)^2} \right) .$$

Dabei ist

$$\int\limits_{\frac{3}{2}}^{x} \frac{dt}{\log(t)^2} \;=\; \int\limits_{\frac{3}{2}}^{x^{\frac{1}{2}}} \frac{dt}{\log(t)^2} + \int\limits_{x^{\frac{1}{2}}}^{x} \frac{dt}{\log(t)^2} \;=\; O\left(\frac{x}{\log(x)^2} \right) .$$

□

Zum Beweis des Primzahlsatzes genügt es also, $\psi(x) = x + o(x)$ nachzuweisen. Dazu wenden wir den Satz 2.10.1 über die Koeffizientensumme auf die Dirichletreihe

$$D(s) \;=\; -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}$$

an, deren Koeffizientensumme gerade $\psi(x)$ ist. Wir werden tatsächlich (PZ0b) mit einem schärferen Restglied beweisen, was auch ein schärferes Restglied im Primzahlsatz (PZ0a) zur Folge hat. Dabei muß dann allerdings die einfache Näherungsfunktion $\frac{x}{\log(x)}$ durch den Integrallogarithmus

$$\mathrm{li}(x) \;=\; \int\limits_{2}^{x} \frac{dt}{\log(t)}$$

ersetzt werden.

Lemma 2.11.2. *Es sei $x = m + \frac{1}{2}$ für $m \in \mathbb{N}$ und $c = c(x) = 1 + \frac{1}{\log(x)}$. Dann ist*

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \;+\; O\left(\frac{x\cdot \log(x)^2}{T} \right) .$$

Beweis. Wir wenden Satz 2.10.1 mit $a_n = \Lambda(n)$ auf

$$D(s) \;=\; -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}$$

mit der Koeffizientenbeschränkung $\Phi(x) = \log(x)$ an. Da $D(s)$ einen Pol erster Ordnung in $s = 1$ besitzt, folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \;=\; O\left((\sigma - 1)^{-1} \right) \quad (\sigma \to 1+) .$$

Es kann also $\alpha = 1$ im Satz 2.10.1 gewählt werden. Die drei Restglieder des Satzes sind alle durch

$$O\left(\frac{x\cdot \log(x)^2}{T} \right)$$

beschränkt. □

Wir werden im folgenden den Integrationsweg $[c-iT, c+iT]$ zu einer geschlossenen Kurve ergänzen, die ein Rechteck R im positiven Sinne berandet, und zwar zur Kurve

$$\gamma \ = \ [c-iT, c+iT] \cup [c+iT, a+iT] \cup [a+iT, a-iT] \cup [a-iT, c-iT]$$

für $a < 1 < c$. Die einzige Singularität des Integranden $-\frac{\zeta'}{\zeta} \cdot \frac{x^s}{s}$ im Innern des Rechtecks R soll der Pol in $s = 1$ sein. Das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds$$

wird dann durch den Residuensatz ausgewertet. Dazu muß sichergestellt werden, daß $\zeta(s)$ im Innern von R keine Nullstellen besitzt, d.h. zum Beweis des Primzahlsatzes benötigt man die Existenz einer <u>nullstellenfreien Zone</u>. Diese wollen wir im folgenden diskutieren. Wir wissen nach Satz 2.6.1, daß $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > 1$ ist. Entscheidend für den Beweis des Primzahlsatzes durch Hadamard und de la Vallée-Poussin im Jahre 1896 war die Tatsache, daß $\zeta(s)$ auch auf der Geraden $\sigma = 1$ keine Nullstellen besitzt. Diese Tatsache reicht für den Beweis des Primzahlsatzes aus, liefert jedoch nur die Asymptotik. Der Beweis für $\zeta(1+it) \neq 0$ beinhaltet jedoch auch die Grundidee für den Beweis des Primzahlsatzes, daher wollen wir damit beginnen:

Satz 2.11.3 (Hadamard und de la Vallée-Pussin)**.** *Für $t \neq 0$ ist $\zeta(1+it) \neq 0$.*

Beweis. Wir verwenden die Ungleichung

$$3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) \ \geq \ 0 \quad (\forall \theta \in \mathbb{R})\,. \tag{1}$$

Angenommen $\zeta(s)$ besitzt eine Nullstelle der Ordnung $m_1 \geq 1$ in $s = 1 + i\gamma$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und eine Nullstelle der Ordnung $m_2 \geq 0$ in $s = 1 + 2i\gamma$. Für $\sigma > 1$ sei

$$\varphi(s) \ = \ 3\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + 4\frac{\zeta'(s+i\gamma)}{\zeta(s+i\gamma)} + \frac{\zeta'(s+2i\gamma)}{\zeta(s+2i\gamma)}\,.$$

Diese Funktion besitzt in $s = 1$ die Laurententwicklung

$$\varphi(s) \ = \ -\frac{3}{s-1} + \frac{4m_1}{s-1} + \frac{m_2}{s-1} + h(s)$$

mit einer in $s = 1$ holomorphen Funktion $h(s)$. Es folgt

$$\lim_{\sigma \to 1+} \left(\Re(\varphi(\sigma))\right) \ = \ \infty\,. \tag{2}$$

Andererseits ist nach Satz 2.11.1

$$\varphi(\sigma) \ = \ -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \left(3 + 4n^{-i\gamma} + n^{-2i\gamma}\right)\,,$$

also wegen (1)

$$\Re(\varphi(\sigma)) \ = \ -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \left(3 + 4\cos(\gamma \log(n)) + \cos(2\gamma \log(n))\right) \ \leq \ 0$$

im Widerspruch zu (2). □

Es ist nun möglich, die Nullstellenfreiheit auch für ein Gebiet links von der Geraden $\sigma = 1$ zu beweisen. Wir stellen zunächst einige Hilfsmittel aus der Funktionentheorie bereit.

Satz 2.11.4 (Borel-Carathéodory)**.** *Die Funktion f sei holomorph auf einem Gebiet, das die Kreisscheibe $|s| \leq R$ enthält. Es sei $f(0) = 0$ und $\Re(f(s)) \leq M$ für alle $|s| \leq R$. Für $|s| \leq r < R$ gilt dann*

$$|f(s)| \ \leq \ \frac{2Mr}{R-r} \ \ , \ \ |f'(s)| \ \leq \ \frac{2MR}{(R-r)^2}\,.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \ \leq \ \frac{2M}{R^k} \quad \text{für alle} \quad k \geq 1. \tag{1}$$

Die Substitution $s = R \cdot e(\theta)$ ergibt mittels der Cauchyschen Integralformel

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta))d\theta \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s)\frac{ds}{s} \ = \ f(0) \ = \ 0\,. \tag{2}$$

Für $k > 0$ haben wir

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta))e(k\theta)d\theta \ = \ \frac{R^{-k}}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s)s^{k-1}ds \ = \ 0 \tag{3}$$

und

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta))e(-k\theta)d\theta \ = \ \frac{R^k}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s)s^{-k-1}ds \ = \ \frac{R^k f^{(k)}(0)}{k!}\,. \tag{4}$$

Indem wir eine Linearkombination von (2),(3) und (4) bilden, erhalten wir für beliebige $\phi \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta))(1 + \cos(2\pi(k\theta + \phi)))d\theta \ = \ \frac{R^k \cdot e(-\phi) \cdot f^{(k)}(0)}{2k!}$$

und

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\frac{1}{2}R^k \cdot e(-\phi) \cdot f^{(k)}(0)}{k!}\right) \ \leq \ M\int_0^1 (1 + \cos(2\pi(k\theta + \phi)))d\theta \ = \ M \tag{5}$$

für alle $k > 0$. Wir wählen ϕ so, daß $e(-\phi)f^{(k)}(0) = |f^{(k)}(0)|$ ist. Die Gleichung (1) folgt dann aus (5). Aus (1) folgt weiter

$$|f(s)| \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| r^k \ \leq \ 2M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{r}{R}\right)^k \ = \ \frac{2Mr}{R-r}$$

sowie

$$|f'(s)| \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(0)|kr^{k-1}}{k!} \ \leq \ \frac{2M}{R} \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\tfrac{r}{R}\right)^{k-1} \ = \ \frac{2MR}{(R-r)^2}\,.$$

□

Lemma 2.11.3. *Es sei f holomorph in einem Gebiet, das die Kreisscheibe $|s-s_0| \le r$ umfaßt. Es sei $M > 1$ so gewählt, daß*

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| \;<\; e^M$$

auf der Kreisscheibe $|s-s_0| \le r$ gilt. Dann ist mit einer absoluten Konstante $A > 0$

$$\left|\frac{f'(s)}{f(s)} - \sum_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho}\right| \;<\; \frac{A \cdot M}{r} \quad \text{für } |s-s_0| \;\le\; \tfrac{1}{4}r\,,$$

wobei ϱ alle Nullstellen von f mit $|\varrho - s_0| \le \frac{1}{2}r$ entsprechend ihrer Vielfachheit durchläuft.

Beweis. Die Funktion

$$g(s) \;=\; f(s) \cdot \prod_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho}$$

ist für $|s-s_0| \le r$ holomorph und auf der kleineren Kreisscheibe $|s-s_0| \le \frac{1}{2}r$ von null verschieden. Auf dem Rand $|s-s_0| = r$ gilt $|s-\varrho| \ge \frac{1}{2}r \ge |s_0-\varrho|$, und damit

$$\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right| \;=\; \left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| \cdot \left|\prod_{\varrho} \frac{s_0-\varrho}{s-\varrho}\right| \;\le\; \left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| \;<\; e^M$$

nach Voraussetzung. Nach dem Maximumsprinzip gilt diese Ungleichung dann auch auf der Kreisscheibe $|s-s_0| \le r$. Wir setzen

$$h(s) \;=\; \operatorname{Log}\left(\frac{g(s)}{g(s_0)}\right)\,,$$

wobei Log die holomorphe Funktion sei, die aus $\log :\; (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch analytische Fortsetzung hervorgeht. Dann ist $h(s)$ holomorph für $|s-s_0| \le \frac{1}{2}r$. Zudem ist $h(s_0) = 0$ und $\Re(h(s)) = M$. Nach Satz 2.11.4 ist

$$|h'(s)| \;\le\; \frac{2M \cdot \frac{1}{2}r}{(\frac{1}{2}r - \frac{1}{4}r)^2} \;\le\; \frac{A \cdot M}{r}$$

für $|s-s_0| \le \frac{1}{4}r$, woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 2.11.4. *Die Funktion f sei in einem Gebiet, das die Kreisscheibe $|s-s_0| < r$ umfaßt, holomorph. Es sei mit $M > 1$*

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| \;<\; e^M$$

für $|s-s_0| < r$, und f habe keine Nullstellen im Halbkreis $\{|s-s_0| \le r \mid \Re(s) > \Re(s_0)\}$. Dann gilt

$$-\Re\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) \;<\; \frac{A \cdot M}{r}\,. \tag{1}$$

Hat f eine Nullstelle ϱ_0 auf der Strecke zwischen $s_0 - \frac{1}{2}r$ und s_0, so gilt

$$-\Re\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) \;<\; \frac{A \cdot M}{r} - \frac{1}{s_0-\varrho_0}\,. \tag{2}$$

Dabei ist A eine absolute Konstante.

Beweis. Nach Lemma 2.11.3 gilt

$$-\Re\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) \;<\; \frac{A\cdot M}{r} - \sum_{|\varrho - s_0|\le \frac{1}{2}r} \Re\left(\tfrac{1}{s_0-\varrho}\right)\,.$$

Aus $\mathrm{Re}(\frac{1}{s_0-\varrho}) \ge 0$ für alle ϱ in der Summe folgt die Behauptung. □

Lemma 2.11.5. *Es sei $m \in \mathbb{Z}$ und $\delta > 0$. Für $\sigma = -m + \delta$ und $|s-1| \ge 1$ ist*

$$\zeta(s) \;=\; O_{m,\delta}\left(t^{m+1}\right)$$

für $|t| \to \infty$.

Beweis. Mit der allgemeinen Eulerschen Summenformel besitzt $\zeta(s)$ für $\sigma > 1$ mit $\varepsilon < \frac{1}{2}$ und $g(u) = u^{-s}$, $g^{(k)}(u) = (-1)^k s(s+1)\cdots(s+k-1)u^{-(s+k)}$ die Darstellung

$$\lim_{x\to\infty}\left(\int\limits_{1-\varepsilon}^{x} g(u)du + \sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+1}(g^{(k)}(x)P_k(x) - g^{(k)}(1-\varepsilon)P_k(1-\varepsilon)) + (-1)^m \int\limits_{1-\varepsilon}^{x} g^{(m+1)}(u)P_m(u)du\right)$$

$$\underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - P_0(x)x^{-s} + \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}s(s+1)\cdots(s+k-1)(x^{-(s+k)}P_k(x) - P_k(1))\right)$$

$$+(-1)^m s(s+1)\cdots(s+m)\int\limits_{1}^{\infty} u^{-(s+m+1)}P_m(u)du$$

$$= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k P_k(1)s(s+1)\cdots(s+k-1) \;+\; (-1)^m\int\limits_{1}^{\infty} u^{-(s+m+1)}P_m(u)du\,. \tag{1}$$

Da das Integral

$$\int\limits_{1}^{\infty} u^{-(s+m+1)}P_m(u)du$$

für $\sigma > -m$ konvergiert, gilt die Darstellung (1) für $\sigma > -m$. Nun ist

$$\int\limits_{1}^{\infty} u^{-(s+m+1)}P_m(u)du \;=\; O(1) \quad , \quad s(s+1)\cdots(s+k-1) \;=\; O_m(|t|^k) \;\; (|t|\to\infty)$$

für $1 \le k \le m+1$. Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 2.11.2. Es sei $T > 0$. Mit $N(T)$ bezeichnen wir die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ mit $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ und $0 < \mathrm{Im}(s) < T$.

Lemma 2.11.6. *Es ist $N(T+1) - N(T) = O(\log(T))$ für $T \to \infty$. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Für alle $s = \sigma + it$ mit $\sigma \ge -m$ und $t > 0$ und $\zeta(s) \ne 0$ gilt*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{|\mathrm{Im}(\varrho)-t|\le 1} \frac{1}{s-\varrho} \;+\; O_m(\log(t)) \;\; (t\to\infty)\,.$$

Beweis. Wir wenden Lemma 2.11.3 an mit

$$f(s) \;=\; \zeta(s) \;\;,\;\; s_0 \;=\; 2+it \;\;,\; r \;=\; 4(m+3)\,.$$

Es ist

$$|\zeta(s_0)| \;=\; \prod_p \frac{1}{|1-p^{-s_0}|} \;\geq\; \prod_p \frac{1}{1+p^{-2}}\,.$$

Nach Lemma 2.11.5 sind die Voraussetzungen von Lemma 2.11.3 mit $M = 4(m+4)\log(t)$ erfüllt, falls $t \geq t_0$ genügend groß ist. Lemma 2.11.3 ergibt für $|s-s_0| \leq m+3$ dann

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho}\right| \;=\; O_m(\log(t))\,, \tag{1}$$

wobei ϱ alle Nullstellen von $\zeta(s)$ mit $|\varrho - s_0| \leq 2(m+3)$ entsprechend ihrer Vielfachheit durchläuft. Wir wenden (1) zunächst mit $s = s_0$ und $m = 2$ an: wegen $\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} = O(1)$ für $t \to \infty$ erhalten wir

$$\Re\left(\sum_{|\varrho-s_0|\leq 10} \frac{1}{s_0-\varrho}\right) \;=\; O(\log(t))\,. \tag{2}$$

Für $\varrho = \beta + i\gamma$ ist

$$\Re\left(\frac{1}{s_0-\varrho}\right) \;=\; \Re\left(\frac{\bar{s}_0-\bar{\varrho}}{|s_0-\varrho|^2}\right) \;=\; \frac{2-\beta}{|s_0-\varrho|^2}\,.$$

Es ist $2-\beta \geq 1$ und $|s_0-\varrho|^2 \leq 100$, also

$$\Re\left(\frac{1}{s_0-\varrho}\right) \;\geq\; \frac{1}{100}\,.$$

Mit (2) folgt

$$N(t+1) \;-\; N(t) \;=\; O(\log(t))\,. \tag{3}$$

Aus (1) folgt schließlich für $|s-s_0| \leq m$ die Abschätzung

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_{|\varrho-s_0|\leq 1} \frac{1}{s-\varrho}\right| \;=\; O_m(\log(t)) + O_m\left(\sum_{1\leq|\varrho-s_0|\leq 2(m+3)} \frac{1}{s-\varrho}\right) \;=\; O_m(\log(t))$$

wegen (3). □

Wir formulieren nun einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der Größenordnung der Riemannschen Zeta-Funktion in der Nähe von $\sigma = 1$, sowie der Weite der nullstellenfreie Zone von $\zeta(s)$:

Satz 2.11.5 (Nullstellenfreie Zone der Zeta-Funktion, allgemeines Ergebnis). *Es gibt eine absolute Konstante $A_1 > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Es sei $\zeta(s) \ll e^{\Phi(t)}$ für $t \to \infty$ in dem Gebiet $1-\theta(t) \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 1$, wobei $\Phi(t)$ und $\frac{1}{\theta(t)}$ positiv und monoton wachsend in t seien, sowie*

$$\theta(t) \leq 1 \;\;,\;\; \Phi(t) \to \infty \;\;,\;\; \frac{\Phi(t)}{\theta(t)} e^{-\Phi(t)} \to 0$$

für $t \to \infty$. Es gelte zudem

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\theta(t+1)}{\theta(t)} \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t+1)}{\Phi(t)} \;=\; 1\,.$$

Dann hat $\zeta(s)$ keine Nullstellen im Gebiet

$$\sigma \;\geq\; 1 - 2A_1 \cdot \frac{\theta(2t+1)}{\Phi(2t+1)} \,. \tag{NZ1}$$

Zudem gilt

$$\sigma \;\geq\; 1 - A_1 \cdot \frac{\Phi(2t)}{\theta(2t)} \quad\Rightarrow\quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; O\left(\frac{\Phi(2t)}{\theta(2t)} \cdot \log(t)\right) \,. \tag{NZ2}$$

Beweis. Es sei $\beta + i\gamma$ eine Nullstelle von $\zeta(s)$ in der oberen Halbebene. Die Konstanten $A_k > 0$ für $k \geq 2$ werden im folgenden absolut sein. Es sei σ_0 beliebig mit

$$1 + e^{-\Phi(2\gamma+1)} \;\leq\; \sigma_0 \;\leq 2 \tag{1}$$

sowie

$$s_0 \;=\; \sigma_0 + i\gamma \;\;,\;\; s_0' \;=\; \sigma_0 + 2i\gamma \tag{2}$$

und

$$r \;=\; \theta(2\gamma+1) \,. \tag{3}$$

Da $\theta(t)$ monoton fallend ist, liegen die Kreisscheiben $|s - s_0| \leq r$ und $|s - s_0'| \leq r$ im Bereich $\{\sigma + it \mid \sigma \geq 1 - \theta(t)\}$. Wegen $|\zeta(s_0)|^{-1} < \exp(A\Phi(2\gamma+1))$ bzw. $|\zeta(s_0')|^{-1} < \exp(A\Phi(2\gamma+1))$ für genügend großes A existiert eine Konstante A_2, so daß

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right| \;<\; e^{A_2\Phi(2\gamma+1)} \;\text{ bzw. }\; \left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0')}\right| \;<\; e^{A_2\Phi(2\gamma+1)} \tag{4}$$

gilt auf den Kreisscheiben $|s - s_0| \leq r$ bzw. $|s - s_0'| \leq r$. Wir wenden jetzt Lemma 2.11.4 an mit $M = A_2\Phi(2\gamma+1)$ und erhalten

$$-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma_0 + 2i\gamma)}{\zeta(\sigma_0 + 2i\gamma)}\right) \;<\; A_3 \frac{\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)} \,. \tag{5}$$

Wir behandeln zunächst

<u>Fall I: $\beta > \sigma_0 - \frac{1}{2}r$</u>
Wir erhalten wegen Lemma 2.11.4 in diesem Fall

$$-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma_0 + i\gamma)}{\zeta(\sigma_0 + i\gamma)}\right) \;<\; A_3 \frac{\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)} - \frac{1}{\sigma_0 - \beta} \,. \tag{6}$$

Es ist

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} \;<\; \frac{a}{\sigma_0 - 1} \tag{7}$$

mit $a = a(\sigma_0) \to 1$ für $\sigma_0 \to 1$. Wie im Beweis für $\zeta(1+it) \neq 0$ (Satz 2.11.3) verwenden wir nun die Ungleichung

$$-3\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} - 4\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma_0 + i\gamma)}{\zeta(\sigma_0 + i\gamma)}\right) - \Re\left(\frac{\zeta'(\sigma_0 + 2i\gamma)}{\zeta(\sigma_0 + 2i\gamma)}\right) \;\geq\; 0 \tag{8}$$

für $\sigma > 1$. Wir wenden (8) an mit $\sigma = \sigma_0$ und erhalten mit (5), (6) und (7) dann

$$\frac{3a}{\sigma_0 - 1} + \frac{5A_3\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)} - \frac{4}{\sigma_0 - \beta} \;\geq\; 0 \,,$$

also

$$\sigma_0 - \beta \;\geq\; \left(\frac{3a}{4(\sigma_0 - 1)} + \frac{5A_3}{4} \cdot \frac{\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}\right)^{-1} \,,$$

und somit

$$1-\beta \;\geq\; \left(\frac{3a}{4(\sigma_0-1)}+\frac{5A_3}{4}\cdot\frac{\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}\right)^{-1}-(\sigma_0-1) \;=\; \frac{1-\frac{3}{4}a-\frac{5}{4}A_3\cdot\frac{\Phi(2\gamma+1)\cdot(\sigma_0-1)}{\theta(2\gamma+1)}}{\frac{3a}{4(\sigma_0-1)}+\frac{5}{4}A_3\cdot\frac{\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}}\,. \tag{9}$$

Für hinreichend große γ können wir wegen (1)

$$\sigma_0-1 \;=\; \frac{1}{40A_3}\cdot\frac{\theta(2\gamma+1)}{\Phi(2\gamma+1)} \tag{10}$$

und wegen (7) $a=\frac{5}{4}$ wählen. Wir erhalten aus (9)

$$1-\beta \;\geq\; A_1\frac{\theta(2\gamma+1)}{\Phi(2\gamma+1)}\;,\ \text{also (NZ1)}\,.$$

<u>Fall II:</u>
Es gelte

$$\beta \;\leq\; \sigma_0-\frac{1}{2}r \;=\; 1+\frac{1}{40A_3}\cdot\frac{\theta(2\gamma+1)}{\Phi(2\gamma+1)}-\frac{1}{2}\theta(2\gamma+1)\,. \tag{11}$$

Daraus folgt ebenso die Behauptung (NZ1). Für

$$\sigma \;\geq\; 1-A_1\frac{\theta(2t)}{\Phi(2t)}$$

folgt wegen (NZ1) die Abschätzung

$$|s-\varrho|^{-1} \;\gg\; \frac{\Phi(2t)}{\theta(2t)}$$

für alle Nullstellen ϱ von $\zeta(s)$ mit $|\mathrm{Im}(\varrho)-t|\leq 1$. Die Behauptung (NZ2) folgt mit Lemma 2.11.6. □

Wir benutzen nun das - relativ einfache - Ergebnis von Lemma 2.11.5 über die Größenordnung von $\zeta(s)$ um daraus ein - ebenfalls einfaches - Resultat über die nullstellenfreie Zone von $\zeta(s)$ im nächsten Satz zu erhalten, um daraus eine erste einfache Version des Primzahlsatzes mit Restglied zu folgern. Wir werden dann im folgenden durch die Verwendung von Weylschen Exponentialsummen die Ergebnisse von Lemma 2.11.5 über die Größenordnung von $\zeta(s)$ wiederholt verbessern. Dies wird dann auch zu Verbesserungen in den Folgerungen führen: wir erhalten eine größere nullstellenfreie Zone als in Satz 2.11.5 und ein besseres Restglied im Primzahlsatz.

Satz 2.11.6 (Nullstellenfreie Zone, 1. Version)**.** *Es gibt eine absolute Konstante* $A_0>0$*, so dass* $\zeta(s)\neq 0$ *für* $t\geq 0$ *und* $\sigma\geq 1-\frac{2A_0}{\log(t)}$ *ist. Für* $\sigma\geq 1-\frac{A_0}{\log(t)}$ *gilt*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; O\left(\log(t)^2\right)\,.$$

Beweis. Wir wenden Satz 2.11.5 an mit $\theta=\frac{1}{2}$. Nach Lemma 2.11.5 ist die Voraussetzung von Satz 2.11.5 $\zeta(s)\ll e^{\Phi(t)}$ für $t\to\infty$ im Streifen $1-\theta(t)\leq\sigma\leq 2$ erfüllt mit $\Phi(t)=C\cdot\log(t)$ für ein festes $C>0$. □

Definition 2.11.3. Der <u>Integrallogarithmus</u> $\mathrm{li}(x)$ ist für $x\geq 2$ durch

$$\mathrm{li}(x) \;=\; \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$$

definiert.

Satz 2.11.7 (Primzahlsatz mit Restglied, 1. Version). *Es gibt Konstanten $c_0, c_1 > 0$, so daß gilt:*

$$\psi(x) \;=\; x \;+\; O\left(x \cdot \exp(-c_0 \log(x)^{\frac{1}{2}})\right) \;, \tag{PZ1a}$$

$$\pi(x) \;=\; \mathrm{li}(x) \;+\; O\left(x \cdot \exp(-c_1 \log(x)^{\frac{1}{2}})\right) \;. \tag{PZ1b}$$

Beweis. Es sei zunächst $T = T(x) > 1$, $c = c(x) = 1 + \log(x)^{-1}$, $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$. T wird später so gewählt, dass wir das optimale Ergebnis erhalten. Nach Lemma 2.11.2 ist

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;+\; O\left(\frac{x \cdot \log(x)^2}{T}\right) \;. \tag{1}$$

Wir ergänzen den Integrationsweg $[c - iT, c + iT]$ zur geschlossenen Kurve

$$\mathcal{C} \;=\; [c - iT, c + iT] \,\cup\, [c + iT, a + iT] \,\cup\, [a + iT, a - iT] \,\cup\, [a - iT, c - iT]$$

mit $a = 1 - \frac{A_0}{\log(T)}$, wobei A_0 die Konstante aus Satz 2.11.6 ist. Es ist nach dem Residuensatz und Satz 2.11.6

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; \underset{s=1}{Res} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s}\right) \;=\; x \,, \tag{2}$$

$$\int\limits_{c+iT}^{a+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(\frac{x \cdot \log(T)^2}{T}\right) \;, \tag{3}$$

$$\int\limits_{a-iT}^{c-iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(\frac{x \cdot \log(T)^2}{T}\right) \;, \tag{4}$$

sowie

$$\int\limits_{a-iT}^{a+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(x \cdot \exp\left(-A_0 \frac{\log(x)}{\log(T)}\right) \cdot \log(T)^3\right) \;. \tag{5}$$

Die Restglieder in (3) und (4) sind monoton fallend in $T = T(x)$, während das Restglied in (5) in T monoton wächst. Das optimale Resultat wird erreicht, wenn T so gewählt wird, daß beide etwa gleich groß sind, d.h. wenn

$$\frac{x}{T} \;=\; x \cdot \exp\left(-\frac{\log(x)}{\log(T)}\right)$$

gilt (die anderen Terme ignorieren wir), also für

$$\log(T) \;=\; (\log(x))^{\frac{1}{2}} \;. \tag{6}$$

Aus (1)-(6) folgt

$$\psi(x) \;=\; x \;+\; O\left(x \cdot \exp\left(-c_0 (\log(x)^{\frac{1}{2}})\right)\right) \;. \tag{7}$$

Man sieht leicht, dass die Bedingung $x = m + \frac{1}{2}$ entfallen kann. Die Behauptung (PZ1b) folgt aus (PZ1a) mittels partieller Summation (wobei die Konstante c_0 leicht abgeändert wird). □

2.12 Primzahlverteilung und Nullstellen, Riemannsche Vermutung

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß die Qualität des Restglieds im Primzahlsatz wesentlich von der Existenz einer nullstellenfreien Zone für die Riemannsche Zeta-Funktion abhängt. Wir werden nun Ausdrücke für $\psi(x)$ betrachten, in denen die Nullstellen der Zeta-Funktion direkt auftreten.

Satz 2.12.1. *Es sei* $x = m + \frac{1}{2}$ *mit* $m \in \mathbb{N}$. $\varrho = \beta + i\gamma$ *bedeute eine Nullstelle von* $\zeta(s)$ *mit* $\beta = \mathrm{Re}(\varrho) \in (0,1)$ *und* $\gamma = \mathrm{Im}(\varrho)$. *Dann gilt für* $x \geq 1$ *und* $1 \leq T \leq x$

$$\psi(x) \;=\; x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\varrho}{\varrho} \;+\; O\left(\frac{x \cdot \log(x)^2}{T}\right) . \tag{1}$$

Beweis. Wir verwenden die Darstellung von $\psi(x)$ als komplexes Kurvenintegral (Lemma 2.11.2):

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;+\; O\left(\frac{x \cdot \log(x)^2}{T}\right) \tag{2}$$

mit $c = c(x) = 1 + \log(x)^{-1}$. Den vertikalen Integrationsweg $[c - iT, c + iT]$ ergänzen wir dieses Mal zu einem Rechteck, das die Nullstellen von $\zeta(s)$ umfasst. Nach Lemma 2.11.6 gilt für die Anzahl der Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ mit $|\gamma - T| \leq \frac{1}{2}$: $N(T + \frac{1}{2}) - N(T - \frac{1}{2}) = O(\log(T))$. Es gibt eine feste Konstante $c_0 > 0$ und ein $T' \in [T - \frac{1}{2}, T + \frac{1}{2}]$, so daß

$$|\gamma - T'| \;\geq\; c_0 \log(T')^{-1} \tag{3'}$$

für alle Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ von $\zeta(s)$ gilt. Ersetzen wir in (1) die Summe $\sum \frac{x^\varrho}{\varrho}$ über die Nullstellen mit $|\gamma| \leq T$ durch die Summe

$$\sum_{|\gamma| \leq T'} \frac{x^\varrho}{\varrho} \,,$$

so ist der Unterschied beschränkt durch

$$\left| \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\varrho}{\varrho} - \sum_{|\gamma| \leq T'} \frac{x^\varrho}{\varrho} \right| \;=\; O\left(\frac{x \cdot \log(T')}{T'}\right) .$$

Es genügt daher, (1) für T' anstelle von T zu zeigen. Wir schreiben im folgenden wieder T statt T' und setzen anstelle von (3') nun

$$|\gamma - T| \;\geq\; c_0 \log(T)^{-1} \tag{3}$$

voraus für alle Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ von $\zeta(s)$. Wir ergänzen den Integrationsweg $[c - iT, c + iT]$ zur geschlossenen Kurve

$$\mathcal{C} \;=\; [c - iT, c + iT] \,\cup\, [c + iT, -\tfrac{1}{2} + iT] \,\cup\, [-\tfrac{1}{2} + iT, -\tfrac{1}{2} - iT] \,\cup\, [-\tfrac{1}{2} - iT, c - iT] \,.$$

Für $s \in [c + iT, -\frac{1}{2} + iT]$ haben wir nach Lemma 2.11.6 und wegen (3) die Abschätzung

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{|\beta - T| < 1} \frac{1}{s - \varrho} + O(\log(T)) \;=\; O\left((N(T+1) - N(T-1)) \log(T)\right) + O(\log(T)) \;=\; O\left(\log(T)^2\right)$$

und damit

$$\int_{c+iT}^{-\frac{1}{2}+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(\frac{x \cdot \log(T)^2}{T}\right) \tag{4}$$

und ebenso

$$\int_{-\frac{1}{2}-iT}^{c-iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(\frac{x\cdot\log(T)^2}{T}\right)\,. \tag{5}$$

Für $s=-\frac{1}{2}+it$ mit $t\in[-T,T]$ ist nach Lemma 2.11.6

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{|\mathrm{Im}(\varrho)-t|<1} \frac{1}{s-\varrho} \;=\; O(\log|t|)$$

und damit

$$\int_{-\frac{1}{2}-iT}^{-\frac{1}{2}+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log(T)^2\right)\,. \tag{6}$$

Nach dem Residuensatz ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; \underset{s=1}{Res}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}\right) \;+\; \sum_{|\gamma|\le T} \underset{s=\varrho}{Res}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}\right) \;=\; x-\sum_{|\gamma|\le T}\frac{x^\varrho}{\varrho} \tag{7}$$

und die Behauptung folgt aus (2)-(7). □

Zwischen dem Restglied im Primzahlsatz und der horizontalen Verteilung der Nullstellen von $\zeta(s)$ besteht eine enge Beziehung, insbesondere auch zur Riemannschen Vermutung:

Vermutung 2.12.1 (Riemannsche Vermutung)**.** *Alle Nullstellen von* $\zeta(s)$ *im kritischen Streifen* $0<\mathrm{Re}(s)<1$ *liegen auf der kritischen Geraden* $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$.

Satz 2.12.2. *Es seien*

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \inf\left\{\alpha \;:\; \forall\varepsilon>0:\ \psi(x)=x+O_\varepsilon\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right)\right\}\\
\theta_2 &= \inf\left\{\alpha \;:\; \forall\varepsilon>0:\ \pi(x)=\mathrm{li}(x)+O_\varepsilon\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right)\right\}\\
\theta_3 &= \sup\left\{\beta \;:\; \exists\varrho=\beta+i\gamma:\ \zeta(\varrho)=0\right\}.
\end{aligned}$$

Dann gilt $\theta_1=\theta_2=\theta_3$*, insbesondere ist die Riemannsche Vermutung jeweils äquivalent zu*

$$\forall\varepsilon>0:\ \psi(x)\;=\;x+O_\varepsilon\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\quad \textit{bzw.}\quad \forall\varepsilon>0:\ \pi(x)\;=\;\mathrm{li}(x)+O_\varepsilon\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\,.$$

Bemerkung 2.12.1. Man kann zeigen, daß im kritischen Streifen unendlich viele Nullstellen von $\zeta(s)$ liegen. Nach deren Imaginärteil geordnet ergeben sich die ersten sechs Nullstellen als

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &= \tfrac{1}{2}+14.13i\\
\varrho_2 &= \tfrac{1}{2}+21.02i\\
\varrho_3 &= \tfrac{1}{2}+25.01i\\
\varrho_4 &= \tfrac{1}{2}+30.42i\\
\varrho_5 &= \tfrac{1}{2}+32.94i\\
\varrho_6 &= \tfrac{1}{2}+37.59i
\end{aligned}$$

X. Gourdon und P. Demicki haben 2004 rechnerisch bestätigt, dass $\mathrm{Re}(\varrho_n)=\frac{1}{2}$ ist für $n\le 10^{13}$.

Beweis von Satz 2.12.2. Die Identität $\theta_1 = \theta_2$ folgt durch partielle Summation, wir verzichten auf die Rechnung. Es genügt daher, $\theta_1 = \theta_3$ zu zeigen. Wir zeigen zunächst

$\underline{\theta_1 \leq \theta_3}$:
Dazu wenden wir Satz 2.12.1 an mit $T = x$. Wir erhalten, falls $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$ ist:

$$\psi(x) \;=\; x - \sum_{|\gamma| \leq x} \frac{x^\varrho}{\varrho} \;+\; O\left(\log(x)^2\right)\,. \tag{1}$$

Es ist $|x^\varrho| \leq x^{\theta_3}$ und

$$\left| \sum_{|\gamma| \leq x} \frac{|x^\varrho|}{|\varrho|} \right| \;\leq\; 2x^{\theta_3} \cdot \left(\sum_{1 \leq \gamma \leq x} \frac{1}{\gamma} + O(1) \right)\,. \tag{2}$$

Wir wählen J so, daß $2^J \leq x < 2^{J+1}$ ist und erhalten

$$\sum_{1 \leq \gamma \leq x} \frac{1}{\gamma} \;\leq\; \sum_{j=0}^{J} 2^{-j} \sum_{2^j \leq \gamma \leq 2^{j+1}} 1 \;=\; \sum_{j=0}^{J} 2^{-j} \left(N(2^{j+1}) - N(2^j) \right)\,.$$

Nach Lemma 2.11.6 ist $N(2^{j+1}) - N(2^j) = O(j2^j)$, also

$$\sum_{1 \leq \gamma \leq x} \frac{1}{\gamma} \;=\; O\left(J^2\right) \;=\; O\left(\log(x)^2\right)\,. \tag{3}$$

Mit (1), (2) und (3) folgt

$$\psi(x) \;=\; x + O_\varepsilon\left(x^{\theta_3 + \varepsilon}\right)$$

für alle $\varepsilon > 0$, also $\theta_1 \leq \theta_3$.

$\underline{\theta_3 \leq \theta_1}$:
Es sei

$$\psi(x) \;=\; x + O_\varepsilon\left(x^{\theta_1 + \varepsilon}\right) \quad , \quad \forall \varepsilon > 0\,. \tag{4}$$

Für $\sigma \geq 1$ setzen wir

$$F(s) \;=\; -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \quad , \quad G(s) \;=\; \int_1^\infty (\psi(x) - x) x^{-s-1} dx\,.$$

Partielle Summation ergibt für $\sigma \geq 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} \;=\; \int_1^\infty \psi(x) x^{-s-1} dx \tag{5}$$

und damit

$$F(s) \;=\; -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \;=\; \int_1^\infty (\psi(x) - x) x^{-s-1} dx \;=\; G(s)\,.$$

Aus der Abschätzung (4) folgt nun, daß die Folge

$$G_N(s) \;=\; \int_1^N (\psi(x) - x) x^{-s-1} dx$$

in der Ebene $\sigma > \theta_1$ kompakt gegen $G(s)$ konvergiert. Damit ist $G(s)$ holomorph für $\sigma > \theta_1$. Damit besitzt auch $F(s)$ keinen Pol für $\sigma > \theta_1$, d.h. $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \theta_1$, woraus $\theta_3 \leq \theta_1$ folgt. $\square$

Kapitel 3

Weylsche Exponentialsummen

3.1 Gleichverteilung und Exponentialsummen

Wir haben in Kapitel 1 gesehen, daß die Gleichverteilung von Folgen auf Gruppen eng mit den Charaktergruppen dieser Gruppen verknüpft ist. In diesem Kapitel betrachten wir endliche Folgen auf der Kreisgruppe $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ und Summen über ihre Charaktere $e_n \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $e(\alpha) \to e(n\alpha)$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Die Gleichverteilung wurde in Abschnitt 1.3 nur qualitativ über eine Grenzwertbeziehung definiert. Hier wollen wir ein Maß für die Güte der Gleichverteilung erhalten. Ein solches Maß ist die Diskrepanz.

Definition 3.1.1. Es sei $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ eine endliche Folge mit $x_i \in [0,1]$ mit $1 \le i \le N$. Für $0 \le \alpha \le \beta \le 1$ sei $N(\alpha, \beta) = |\{n\colon\ 1 \le n \le N \colon x_n \in [\alpha, \beta)\}|$. Unter der Diskrepanz D_N der Folge $\vec{x}$ versteht man

$$D_N = D_N(\vec{x}) = \sup_{0 \le \alpha \le \beta \le 1} \left| \frac{N(\alpha,\beta)}{N} - (\beta - \alpha) \right| .$$

Die Folge $(x_1, \ldots, x_N)$ ist von der Gleichverteilung maximal entfernt, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_N$ ist. Der nächste Satz zeigt, daß genau in diesem Fall die Diskrepanz ihren maximalen Wert annimmt.

Satz 3.1.1. *Es ist $0 \le D_N \le 1$, und es ist genau dann $D_N = 1$, wenn $e(x_1) = e(x_2) = \ldots = e(x_n)$ ist.*

Beweis. Es ist $0 \le \frac{N(\alpha,\beta)}{N} \le 1$ für $0 \le \beta - \alpha \le 1$. Daraus folgt die erste Behauptung.
Es ist $D_N = 1$ in einem der folgenden Fälle.
Fall 1:
Für alle $\epsilon > 0$ existiert (α, β) mit $0 \le \alpha \le \beta \le 1$, so daß $N(\alpha, \beta) = 0$ und $\beta - \alpha \ge 1 - \epsilon$. Dies ist nur möglich, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \{0, 1\}$ ist.
Fall 2:
Für alle $\epsilon > 0$ existiert (α, β) mit $N(\alpha, \beta) = N$ und $\beta - \alpha < \epsilon$. Dies ist nur möglich, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_N$ gilt. □

Es erweist sich als nützlich, noch einen zweiten Diskrepanzbegriff einzuführen.

Definition 3.1.2. Unter der Sterndiskrepanz D_N^* der Folge $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ versteht man den Ausdruck

$$D_N^* = D_N^*(\vec{x}) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} \left| \frac{N(0,\alpha)}{N} - \alpha \right| .$$

Satz 3.1.2. *Zwischen Diskrepanz D_N und Sterndiskrepanz D_N^* bestehen die Ungleichungen*

$$D_N^* \le D_N \le 2D_N^*.$$

Beweis. Die erste Ungleichung folgt unmittelbar aus den Definitionen 3.1.1 und 3.1.2.
Es ist $N(\alpha,\beta) = N(0,\beta) - N(0,\alpha)$ für $0 \le \alpha < \beta \le 1$ und deshalb

$$\left|\frac{N(\alpha,\beta)}{N} - (\beta-\alpha)\right| \le \left|\frac{N(0,\beta)}{N} - \beta\right| + \left|\frac{N(0,\alpha)}{N} - \alpha\right|.$$

Die zweite Ungleichung folgt durch Bildung des Supremums. □

Es bestehen Beziehungen zwischen Diskrepanz und numerischer Integration. Diese ist vor allem bei mehrdimensionalen Integralen auch von praktischer Bedeutung.
In einer Dimension stellt sich das Problem wie folgt dar:
Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ mit $x_i \in [0,1]$.
Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Diskrepanz von $\vec{x}$ und der Güte der Approximation von $\int_0^1 f(t)\,dt$ durch das Mittel $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)$?
Wir beschränken uns bei der Diskussion der Einfachheit halber auf stetig differenzierbare Funktionen. Das Ergebnis kann auf Funktionen mit beschränkter Variation verallgemeinert werden. Wir haben die Ungleichung von Koksma für den Spezialfall stetig differenzierbarer Funktionen:

Satz 3.1.3. *Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in [0,1]^N$ habe die Sterndiskrepanz D_N^*. Dann gilt*

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| \le D_N^* \int_0^1 \left|f'(t)\right|\,dt.$$

Beweis. Wir setzen $x_0 = 0$ und $x_{N+1} = 1$ und können annehmen, daß $0 = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_N \le x_{N+1} = 1$ ist. Wir zeigen zunächst

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{N} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(t - \frac{n}{N}\right) f'(t)\,dt. \tag{1}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(t - \frac{n}{N}\right) f'(t)\,dt \quad &= \quad \int_0^1 t f'(t)\,dt - \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{N}\left(f(x_{n+1}) - f(x_n)\right) \\
&\underset{S.2.3.1}{=} \quad [tf(t)]_{t=0}^1 - \int_0^1 f(t)\,dt + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(x_{n+1}) - f(1) \\
&= \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(t)\,dt, \quad \text{also (1).}
\end{aligned}$$

Für $x_n \le t \le x_{n+1}$ haben wir

$$\left|t - \frac{n}{N}\right| \le \max\left\{\left|x_n - \frac{n}{N}\right|, \left|x_{n+1} - \frac{n}{N}\right|\right\}. \tag{2}$$

Es ist $D_N^* = \sup_{0\le\alpha\le 1}\left|\frac{N(0,\alpha)}{N} - \alpha\right|$.
Indem wir $\alpha = x_n + \epsilon$ mit $\epsilon > 0$ beliebig klein setzen, erhalten wir aus (2)

$$\left|t - \frac{n}{N}\right| \le D_N^*$$

für alle $t \in (x_n, x_{n+1})$. Die Behauptung folgt aus (1). □

Als Spezialfall der Ungleichung von Koksma (Satz 3.1.3) ergibt sich die Abschätzung von Exponentialsummen der Form $\sum_{n=1}^{N} e(hx_n)$ durch die Diskrepanz der Folge $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_N)$.

Satz 3.1.4. *Für $h \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ist*

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e(hx_n)\right| \le 4\pi N|h|D_N.$$

Beweis. Wir wenden Satz 3.1.3 für $f(t) = \Re(e(ht)) = \cos(2\pi ht)$ und $f(t) = \Im(e(ht)) = \sin(2\pi ht)$ an. Wir erhalten

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2\pi hx_n) - \int_0^1 \cos(2\pi ht)\,dt\right| \le 2\pi|h|\int_0^1 |\sin(2\pi ht)|\,dtND_N^*$$

und mit Satz 3.1.2

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos(2\pi hx_n)\right| \le 2\pi N|h|D_N. \tag{1}$$

Ähnlich folgt

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin(2\pi hx_n)\right| \le 2\pi N|h|D_N. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. □

Für eine genügend kleine Diskrepanz der Folge $\vec{x}$ erhält man also eine Abschätzung, die besser ist als die (aus der Dreiecksungleichung folgende) triviale Abschätzung

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e(hx_n)\right| \le N.$$

Umgekehrt kann nun auch die Diskrepanz der Folge $\vec{x}$ durch Exponentialsummen abgeschätzt werden. Wir haben die Ungleichung von Erdös- Turan:
Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$D_N \le \frac{6}{m+1} + \frac{4}{\pi}\sum_{h=1}^{m}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{m+1}\right)\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e(hx_n)\right|.$$

Wir beweisen nur eine einfache Version:

Satz 3.1.5. *Es gibt eine absolute Konstante $C > 0$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$D_N \le C\left(\frac{1}{m} + \sum_{h=1}^{m}\frac{1}{h}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e(hx_n)\right|\right).$$

Beweis. Übungsaufgabe □

3.2 Weylsche Exponentialsummen

Definition 3.2.1. Eine weylsche Exponentialumme oder trigonometrische Summe ist eine Summe der Form

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n)). \tag{$*$}$$

Definition 3.2.2. Für $x \in \mathbb{R}$ schreiben wir $x = [x] + \{x\}$ mit $[x] \in \mathbb{Z}$ und $\{x\} \in [0,1)$ und nennen $\{x\}$ den gebrochenen Teil von x. Offenbar hängt $e(f(n))$ nur vom gebrochenen Teil $\{f(n)\}$ ab.

Nach der Ungleichung von Koksma bewirken gute Gleichverteilungseigenschaften der Folge $\{f(n)\}_{a<n\le b}$, d.h. kleine Diskrepanzen, eine kleine obere Schranke von $\sum\limits_{a<n\le b} e(f(n))$. Die Qualität der Schranke wird deutlich, wenn man sie mit der trivialen Abschätzung

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n)) \le b-a$$

vergleicht.

Umgekehrt haben nach der Erdös- Turan- Ungleichung gute obere Schranken für die Weylsche Exponentialsumme $\sum\limits_{a<n\le b} e(hf(n))$ mit $|h| \le m$ und $h \ne 0$ für möglichst große Werte von m gute Gleichverteilungseigenschaften von $\{f(n)\}$ zur Folge.

3.3 Exponentialsummen in Polynomen, Weylschritte

Eine der Ideen von Weyl war es, die Funktion $f(n)$ in der Exponentialsumme durch ein Taylorpolynom genügend hoher Ordnung zu approximieren. Damit kann das Problem der Abschätzung von

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n))$$

auf den Fall zurückgeführt werden, daß $f(n)$ ein Polynom ist. Sind die Zahlen e_ν durch

$$\sum_{0<m\le b-a} e(f(a+m)) \;=\; \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu \sum_{m=1}^{b-a} m^\nu e\left(f'(a)m + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} m^k\right)$$

gegeben, und ist e_ν für $\nu \ge 1$ genügend klein, so kann die Abschätzung der Exponentialsumme mittels partieller Summation auf die Abschätzung von Summen

$$\sum_{m=1}^{\mu} e(P(m))$$

mit dem Taylorpolynom

$$P_k(m) \;=\; f'(a)m \;+\; \cdots \;+\; \frac{f^{(k)}(a)}{k!} m^k$$

zurückgeführt werden. Wir werden im folgenden Weyls Methode zur Abschätzung von Exponentialsummen der Form

$$\sum_{l=1}^{m} e(P(l))$$

mit einem Polynom P beschreiben. Die Idee ist, die Abschätzung von

$$\sum_{l=1}^{m} e(P_k(l))$$

mit einem Polynom k-ten Grades $P_k(l) = \alpha_k l^k + \alpha_{k-1} l^{k-1} + \cdots + \alpha_0$ durch einen sogenannten Weylschritt auf die Abschätzung von Summen der Form

$$\sum_{l=1}^{m} e(P_{k-1}(l))$$

mit einem Polynom $(k-1)$-ten Grades zurückzuführen. Nach $(k-1)$ Schritten gelangt man schließlich zu einem linearen Polynom. Die zugehörigen Exponentialsummen sind endliche geometrische Reihen, deren Wert explizit bekannt ist. Formal wird der Beweis durch Induktion nach dem Grad des Polynoms geführt. Die Qualität der Abschätzung hängt entscheidend von Diophantischen Approximationseigenschaften der Koeffizienten α_i von $P_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \cdots + \alpha_0$ ab.

Es gibt verschiedene Arten, die Güte einer Diophantischen Approximation einer reellen Zahl α durch eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ zu messen. Jedoch kann folgende Feststellung gemacht werden: von zwei Approximationen $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ (mit p_i, q_i jeweils teilerfremd) einer Zahl α ist, falls die Differenzen $|\alpha - \frac{p_1}{q_1}|$ und $|\alpha - \frac{p_2}{q_2}|$ etwa gleich groß sind, diejenige besser, für die der Nenner q_i deutlich kleiner ist.

Beispiel 3.3.1. Es ist $\pi = 3,14159265\ldots$, und aus dieser Dezimalbruchentwicklung erhält man die Approximation

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{3141592}{1000000}$$

mit Differenz $\left|\pi - \frac{p_1}{q_1}\right| \approx 6 \cdot 10^{-7}$. Eine wesentlich bessere (weil einfachere) Approximation ist jedoch gegeben durch

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{355}{113}$$

mit $|\pi - \frac{p_2}{q_2}| \approx 6 \cdot 10^{-7}$.

Die reellen Zahlen, die die besten Diophantischen Approximationen gestatten, sind die ganzen Zahlen. Eine ganze Zahl $p \in \mathbb{Z}$ besitzt die Diophantische Approximation $\frac{p}{q}$ mit $q = 1$ und $p - \frac{p}{q} = 0$, d.h. Nenner und Differenz sind kleinstmöglich. Es sind jedoch gerade Polynome $P_k(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_0$ mit ganzen Koeffizienten α_i, also Koeffizienten mit bestmöglichen Diophantischen Approximationseigenschaften, für die die triviale Abschätzung die richtige Größe liefert: Ist $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le k$, so ist auch $P(n) \in \mathbb{Z}$ und damit $e(P(n)) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. In der Exponentialsumme

$$\sum_{a<n\le b} e(P(n))$$

sind also die Terme $e(P(n))$ von der Gleichverteilung auf dem Einheitskreis maximal weit entfernt, und es ist

$$\sum_{a<n\le b} e(P(n)) = \sum_{a<n\le b} 1 = b - a\,.$$

Wir beginnen mit den linearen Polynomen:

Lemma 3.3.1. *Es sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Ist*

$$S_1 \;=\; \sum_{n=a+1}^{b} e(\lambda n + \mu)\,,$$

so gilt

$$|S_1| \;\leq\; \frac{1}{|\sin(\pi\lambda)|}\,.$$

Beweis. Nach der Summenformel für die endliche geometrische Reihe ist

$$|S_1| \;=\; \left|\frac{1 - e\left((b-a)\lambda\right)}{1 - e(\lambda)}\right| \;\leq\; \frac{2}{|e(\frac{\lambda}{2}) - e(-\frac{\lambda}{2})|} \;=\; \frac{1}{|\sin(\pi\lambda)|}\,.$$

□

Bemerkung 3.3.1. Diese Abschätzung ist nur gut, d.h. wesentlich besser als die triviale Abschätzung $|S_1| \leq b - a$, falls $|\sin(\pi\lambda)|$ wesentlich größer als $(b-a)^{-1}$ ist, was wegen

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\lambda} \;=\; \pi$$

bedeutet, daß $\|\lambda\|$ wesentlich größer als $(b-a)^{-1}$ ist.

Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall zu: Durch wiederholte Anwendung von Differenzenoperatoren wird das Polynom $P(n)$ durch Polynome kleineren Grades ersetzt:

Definition 3.3.1. Die Funktion f sei auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert, und es sei $d \in \mathbb{R}$. Wir setzen $\Delta_d(f)(x) \;:=\; f(x+d) - f(x)$ für alle $x, d \in \mathbb{R}$, für welche die rechte Seite definiert ist. Für $l \geq 2$ ist der <u>iterierte Differenzenoperator</u> $\Delta_{d_l, d_{l-1}, \ldots, d_1}$ rekursiv durch

$$\Delta_{d_l, d_{l-1}, \ldots, d_1}(f)(x) \;=\; \Delta_{d_l}\left(\Delta_{d_{l-1}, \ldots, d_1}(f)\right)(x)$$

gegeben.

Beispiel 3.3.2. Es ist

$$\begin{aligned}\Delta_{d_2, d_1}(f)(x) \;&=\; \Delta_{d_2}\left(\Delta_{d_1}(f)\right)(x) = \Delta_{d_1}(f)(x+d_2) - \Delta_{d_1}(f)(x) \\ &=\; f(x+d_2+d_1) - f(x+d_2) - f(x+d_1) + f(x)\,.\end{aligned}$$

Lemma 3.3.2. *Es seien N_1, N_2 und N natürliche Zahlen, so daß $N_1 < N_2$ und $0 \leq N_2 - N_1 \leq N$ ist. Es sei $f(n)$ eine reellwertige zahlentheoretische Funktion und*

$$S(f) \;=\; \sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(f(n))\,.$$

Dann ist

$$|S(f)|^2 \;=\; \sum_{|d| \leq N} S_d(f) \;\text{ mit }\; S_d(f) \;=\; \sum_{n \in I(d)} e\left(\Delta_d(f)(n)\right)\,,$$

wobei $I(d)$ ein Intervall von aufeinander folgenden Zahlen ist, das in $[N_1+1, N_2]$ liegt.

Beweis. Für irgendeine Zahl d sei $I(d) = [N_1 + 1 - d, N_2 - d] \cap [N_1 + 1, N_2]$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
|S(f)|^2 &= S(f) \cdot \overline{S(f)} = \left(\sum_{m=N_1+1}^{N_2} e(f(m)) \right) \cdot \left(\sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(-f(n)) \right) \\
&= \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \sum_{m=N_1+1}^{N_2} e\left((f(m) - f(n)\right) = \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \sum_{d=N_1+1-n}^{N_2-n} e\left(f(n+d) - f(n)\right) \\
&= \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \sum_{d=N_1+1-n}^{N_2-n} e\left(\Delta_d(f)(n)\right) = \sum_{d=-(N_2-N_1-1)}^{N_2-N_1-1} \sum_{n \in I(d)} e\left(\Delta_d(f)(n)\right) \\
&= \sum_{|d| \le N} \sum_{n \in I(d)} e\left(\Delta_d(f)(n)\right) = \sum_{|d| \le N} S_d(f).
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.3.3. *Es seien $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ und l eine ganze Zahl, so daß $l \ge 1$, $N_1 < N_2$ und $0 \le N_2 - N_1 \le N$ ist. Es sei $f(n)$ eine reellwertige zahlentheoretische Funktion und*

$$S(f) \;=\; \sum_{n=N_1+1}^{N_2+1} e(f(n))\,.$$

Dann ist

$$|S(f)|^{2^l} \;\le\; (2N+1)^{2^l-l-1} \sum_{|d_1| \le N} \cdots \sum_{|d_l| \le N} S_{d_l,\ldots,d_1}(f)$$

mit

$$S_{d_l,\ldots,d_1}(f) \;=\; \sum_{n \in I(d_l,\ldots,d_1)} e\left(\Delta_{d_l,\ldots,d_1}(f)(n)\right)\,,$$

wobei $I(d_l, \ldots, d_1)$ ein Intervall von aufeinander folgenden Zahlen ist, das in $[N_1 + 1, N_2]$ liegt.

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach l geführt. Der Fall $l = 1$ ist gerade Lemma 3.3.2. Wir nehmen an, die Behauptung sei für $l \ge 1$ schon bewiesen. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
|S(f)|^{2^{l+1}} &= \left(|S(f)|^{2^l}\right)^2 \le \left((2N+1)^{2^l-l-1} \sum_{|d_1| \le N} \cdots \sum_{|d_l| \le N} |S_{d_l,\ldots,d_1}(f)| \right)^2 \\
&= (2N)^{2^{l+1}-2l-2} \left(\sum_{|d_1| \le N} \cdots \sum_{|d_l| \le N} |S_{d_l,\ldots,d_1}(f)| \right)^2 \\
&\le (2N)^{2^{l+1}-2l-2} (2N+1)^l \sum_{|d_1| \le N} \cdots \sum_{|d_l| \le N} |S_{d_l,\ldots,d_1}(f)|^2
\end{aligned}$$

mit

$$S_{d_l,\ldots,d_1}(f) \;=\; \sum_{n \in I(d_l,\ldots,d_1)} e\left(\Delta_{d_l,\ldots,d_1}(f)(n)\right)\,.$$

Nach Lemma 3.3.2 gibt es für jedes l-Tupel $(d_l, \ldots, d_1)$ ein Intervall

$$I(d_{l+1}, d_l, \ldots, d_1) \;\subseteq\; I(d_l, \ldots, d_1) \;\subseteq\; [N_1 + 1, N_2]$$

mit

$$|S_{d_l,\dots,d_1}(f)|^2 = \left|\sum_{n\in I(d_l,\dots,d_1)} e\left(\Delta_{d_l,\dots,d_1}(f)(n)\right)\right|^2 = \sum_{|d_{l+1}|\le N}\ \sum_{n\in I(d_{l+1},d_l,\dots,d_1)} e\left(\Delta_{d_{l+1},d_l,\dots,d_1}(f)(n)\right)$$
$$= \sum_{|d_{l+1}|\le N} S_{d_{l+1},d_l,\dots,d_1}(f)$$

und damit

$$|S(f)|^{2^{l+1}} \le (2N+1)^{2^{l+1}-(l+1)-1} \sum_{|d_1|\le N} \cdots \sum_{|d_{l+1}|\le N} S_{d_{l+1},d_l,\dots,d_1}(f)\,.$$

Damit ist Lemma 3.3.3 bewiesen. □

Wir wollen Lemma 3.3.3 nun auf $f(x) = P_k(x)$ mit $P_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_0$ anwenden.

Lemma 3.3.4. *Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $k \ge 2$, sowie $P_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_0$ mit $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und $d_1, d_2, \dots, d_{k-1} \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit*

$$\Delta_{d_{k-1},d_{k-2},\dots,d_1}(P_k)(x) = d_1 \cdots d_{k-1} \cdot k! \cdot \alpha_k x + \beta\,.$$

Beweis. Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$P_k(x+d_1) = \alpha_k x^k + d_1 k\alpha_k x^{k-1} + \alpha_{k-1}x^{k-1} + Q_{k-2}(x)$$

mit einem Polynom $Q_{k-2}(x)$ vom Grad höchstens $k-2$. Also ist

$$\Delta_{d_1}(P_k)(x) = d_1 k\alpha_k x^{k-1} + R_{k-2}(x)\ ,\ \deg(R_{k-2}) \le k-2\,.$$

Durch vollständige Induktion beweist man mit dieser Überlegung leicht für $l \le k$

$$\Delta_{d_l,\dots,d_1}(P_k)(x) = k(k-1)\cdots(k-l+1) \cdot d_l d_{l-1}\cdots d_1 \cdot \alpha_k x^{k-l} + R_{k-l-1}\,.$$

Diese Aussage liefert für $l = k-1$ und $R_0 = \beta$ das Ergebnis. □

Satz 3.3.1. *Es sei $P_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_0$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $k \ge 2$ und $K = 2^{k-1}$. Es sei $S = \sum e(P_k(n))$, wobei n über ein Intervall von höchstens N aufeinanderfolgenden Zahlen läuft. Dann gilt*

$$|S|^K \le 2^{3K} \cdot N^{K-1} + 2^{3K} \cdot N^{K-k} \cdot \sum_{1\le d_1,\dots,d_{k-1}\le N} \min\left(N, |\sin(\pi\alpha_k \cdot k! \cdot d_1\cdots d_{k-1})|^{-1}\right)\,.$$

Beweis. Wir wenden Lemma 3.3.3 mit $l = k-1$ an, und erhalten mit Lemma 3.3.4

$$|S|^K \le (2N+1)^{K-k} \cdot \Sigma_0 \tag{1}$$

mit

$$\Sigma_0 := \sum_{|d_1|\le N} \cdots \sum_{|d_{k-1}|\le N} S_{d_{k-1},\dots,d_1}(P_k)\,,$$

und

$$S_{d_{k-1},\dots,d_1}(P_k) = \sum_{n\in I(d_{k-1},\dots,d_1)} e\left(\Delta_{d_{k-1},\dots,d_1}(P_k)(n)\right)\,,$$

wobei die $I(d_{k-1},\ldots,d_1)$ Intervalle von Länge höchstens N sind. Wir spalten diese Summe auf:

$$\Sigma_0 \;=\; \Sigma_1 \;+\; \Sigma_2\,. \tag{2}$$

In Σ_1 summieren wir über alle $(k-1)$-Tupel $(d_{k-1},\ldots,d_1)$, für die alle $d_j \neq 0$ sind, in Σ_2 über die verbleibenden Tupel. Wir haben nach Lemma 3.3.4:

$$\Delta_{d_{k-1},d_{k-2},\ldots,d_1}(P_k)(x) \;=\; d_1\cdots d_{k-1}\cdot k!\cdot\alpha_k x+\beta$$

und nach Lemma 3.3.1

$$|S_{d_{k-1},\ldots,d_1}(P_k)| \;\le\; \min\big(N, |\sin(\pi\alpha_k\cdot k!\cdot d_1\cdots d_{k-1})|^{-1}\big)$$

In der Abbildung $\Phi:\ (d_{k-1},\ldots,d_1)\longmapsto(|d_{k-1}|,\ldots,|d_1|)$ hat jedes Bild die 2^{k-1} paarweise verschiedenen Urbilder $(\pm|d_{k-1}|,\ldots,\pm|d_1|)$, daher gilt

$$|\Sigma_1| \;\le\; 2^{k-1}\;\cdot\sum_{1\le d_1,\ldots,d_{k-1}\le N}\min\big(N,|\sin(\pi\alpha_k\cdot k!\cdot d_1\cdots d_{k-1})|^{-1}\big)\;. \tag{3}$$

Die Anzahl der $(d_{k-1},\ldots,d_1)$ die mindestens eine Null enthalten, ist höchstens $(k-1)\cdot(2N+1)^{k-2}$. Daher gilt

$$|\Sigma_2| \;\le\; (k-1)\cdot(2N+1)^{k-2}\cdot N\,.$$

Aus (1), (2) und (3) folgt

$$\begin{aligned}|S|^K \;\le\;& (2N+1)^{K-k}(k-1)(2N+1)^{k-2}N\\ &+(2N+1)^{K-k}\cdot 2^{k-1}\;\cdot\sum_{1\le d_1,\ldots,d_{k-1}\le N}\min\big(N,|\sin(\pi\alpha_k\cdot k!\cdot d_1\cdots d_{k-1})|^{-1}\big)\;.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, wenn wir noch die Ungleichung $|k-1|\le 2^{k-1}$ benutzen. □

Satz 3.3.1 ist zentral in der Behandlung von Weylschen Exponentialsummen nach Weyl, Hardy und Littlewood. Da die Schranke entscheidend von der Diophantischen Natur des höchsten Koeffizienten α_k abhängt, kommen in den wichtigsten Anwendungen nicht ein festes Polynom, sondern (oft unendliche) Mengen von Polynomen vor. Es ist dann sicherzustellen, daß für die meisten dieser Polynome der höchste Koeffizient α_k günstige Eigenschaften hat, d.h. daß es nicht zu viele ganze Zahlen n gibt, für die $\|n\alpha_k\|$ klein ist. Eine Methode dies sicherzustellen besteht darin, eine rationale Approximation der Form

$$\left|\alpha_k-\frac{a}{q}\right| \;\le\; \frac{1}{q^2} \tag{$*$}$$

vorauszusetzen, in welcher der Nenner q die passende Größenordnung besitzt. Die Verteilung der gebrochenen Teile $\{n\alpha_k\}$ ähnelt dann stark der Verteilung der $\{\frac{na}{q}\}$, die mit der Theorie der linearen Kongruenzen studiert werden kann. Daraus kann dann die so genannte Weylsche Ungleichung gefolgert werden.

Zunächst wollen wir uns einen Überblick über die Diophantischen Approximationen der Form $(*)$ verschaffen. Dies ist der Inhalt des Dirichletschen Approximationssatzes.

3.4 Der Dirichletsche Approximationssatz

Satz 3.4.1 (Dirichletscher Approximationssatz). *Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $a \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $1 \le q \le N$, so daß*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{qN}.$$

Beweis. Jeder der gebrochenen Teile $\{0\}, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{N\alpha\}$ liegt in einem der N Teilintervalle $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$ für $0 \le k \le N-1$. Nach dem Schubfachprinzip müssen mindestens zwei von ihnen, etwa $\{m_1\alpha\}$ und $\{m_2\alpha\}$ mit $m_1 < m_2$, im selben Teilintervall liegen. Daher gilt

$$\left|\ \{m_2\alpha\} - \{m_1\alpha\}\ \right| \le \frac{1}{N}$$

und somit

$$(m_2 - m_1) \cdot \alpha = [m_2\alpha] - [m_1\alpha] + \{m_2\alpha\} - \{m_1\alpha\}. \tag{1}$$

Wir setzen $q = m_2 - m_1$ und $a = [m_2\alpha] - [m_1\alpha]$. Wegen $0 \le m_i \le N$ folgt $1 \le q \le N$. Weiter folgt aus (1)

$$\alpha - \frac{[m_2\alpha] - [m_1\alpha]}{m_2 - m_1} = \frac{\{m_2\alpha\} - \{m_1\alpha\}}{m_2 - m_1}, \text{ also } \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{qN}.$$

□

Satz 3.4.2. *Ist α irrational, so gibt es unendlich viele rationale Zahlen $\frac{a}{q}$, so daß*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}$$

gilt.

Beweis. Wir konstruieren eine unendliche Folge von rationalen Zahlen $(\frac{a_i}{q_i})$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ und $q_i \in \mathbb{N}$, so daß

$$\left|\alpha - \frac{a_i}{q_i}\right| \le \frac{1}{q_i^2} \tag{1}$$

und

$$\left|\alpha - \frac{a_{i+1}}{q_{i+1}}\right| < \left|\alpha - \frac{a_i}{q_i}\right| \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Aus (2) folgt dann, daß die $\frac{a_i}{q_i}$ paarweise verschieden sind. Die Konstruktion verläuft rekursiv: wir setzen $q_1 = 1$ und $a_1 = [\alpha]$, dann ist offenbar (1) erfüllt. Es seien $\frac{a_1}{q_1}, \ldots, \frac{a_n}{q_n}$ bereits derart konstruiert, daß (1) und (2) gilt. Wir wählen $N_n \in \mathbb{N}$, so daß

$$\left|\alpha - \frac{a_n}{q_n}\right| > \frac{1}{N_n}. \tag{3}$$

Nach Satz 3.4.1 gibt es eine rationale Zahl $\frac{a_{n+1}}{q_{n+1}}$ mit $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$, $q_{n+1} \in \mathbb{N}$ und $1 \le q_{n+1} \le N_n$, so daß

$$\left|\alpha - \frac{a_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \le \frac{1}{q_{n+1} \cdot N_n}, \tag{4}$$

also insbesondere

$$\left|\alpha - \frac{a_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \le \frac{1}{q_{n+1}^2}.$$

Aus (3) und (4) folgt überdies

$$\left|\alpha - \frac{a_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \;<\; \left|\alpha - \frac{a_n}{q_n}\right| .$$

□

3.5 Die Teilerfunktion

Wir wollen zunächst die Summe aus Satz 3.3.1

$$\sum_{1\le d_1,\dots,d_{k-1}\le N} \min\left(N, |\sin(\pi\alpha_k \cdot k! \cdot d_1\cdots d_{k-1})|^{-1}\right)$$

durch eine einfachere Summe von der Form

$$\sum_{n\le M} \min\left(N, \|\alpha_k \cdot n\|^{-1}\right)$$

ersetzen. Dies geschieht dadurch, daß alle $(k-1)$-Tupel $(d_1,\dots,d_{k-1})$, für die das Produkt $d_1\cdots d_{k-1}$ einen festen Wert n annimmt, zusammengefaßt werden. Es geht also zunächst darum, die Anzahl der Darstellungen der Form $d_1\cdots d_{k-1} = n$ für $1 \le d_i \le N$, d.h. die Teilerfunktion abzuschätzen:

Definition 3.5.1. Die Teilerfunktion $\tau(n)$ ist definiert als die Anzahl der positiven Teiler von n:

$$\tau(n) \;=\; \left|\left\{\; (d_1,d_2) \mid d_1 d_2 = n\;,\; d_1,d_2\in\mathbb{N} \;\right\}\right| .$$

Die verallgemeinerte Teilerfunktion definieren wir für $k\in\mathbb{N}$ durch

$$\tau_k(n) \;=\; \left|\left\{\; (d_1,\dots,d_k) \mid d_1\cdots d_k = n\;,\; d_1,\dots,d_k\in\mathbb{N} \;\right\}\right| .$$

Es ist also $\tau(n) = \tau_2(n)$. In diesem Abschnitt sei die Primfaktorzerlegung von n stets $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$. Der Wert $\tau_k(n)$ hängt dann nur von den Exponenten α_i ab.

Lemma 3.5.1. *Die Funktion $\tau_k(n)$ ist multiplikativ. Für Primzahlpotenzen gilt*

$$\tau_k(p^\alpha) \;=\; \binom{\alpha+k-1}{k-1} .$$

Beweis. Jeder Zerlegung $n = d_1\cdots d_k$ entspricht das r-Tupel von Zerlegungen

$$p_j^{\alpha_j} \;=\; ggT(d_1,p_j^{\alpha_j}) \cdot\cdots\cdot ggT(d_k,p_j^{\alpha_j}) \;,\;\; 1\le j\le r .$$

Die Zuordnung ist bijektiv, daher gilt mit

$$\tau_k(n) \;=\; \tau_k(p_1^{\alpha_1}) \cdot\cdots\cdot \tau_k(p_r^{\alpha_r})$$

die Multiplikativität. Der Wert $\tau_k(p^\alpha)$ ist gleich der Anzahl der Produktzerlegungen

$$p^\alpha \;=\; p^{\alpha_1}\cdots p^{\alpha_k} \;\;,\;\; \alpha_1+\cdots+\alpha_k \;=\; \alpha ,$$

d.h. gleicht der Anzahl der Darstellungen von α als Summe von k nichtnegativen Summanden. Die Folgen $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ entsprechen umkehrbar eindeutig den Folgen $(\beta_1,\dots,\beta_{k-1})$ mit

$$1 \;\le\; \beta_1 \;<\; \cdots \;<\; \beta_{k-1} \;\le\; \alpha+k-1 ,$$

wobei die Bijektion durch

$$\beta_j \;=\; (\alpha_1+1)+\cdots+(\alpha_j+1)$$

gegeben ist. Deren Anzahl ist gerade $\binom{\alpha+k-1}{k-1}$. □

Lemma 3.5.2. *Es sei $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$, dann ist $\tau_k(n) = O_{k,\epsilon}(n^\varepsilon)$.*

Bemerkung 3.5.1. Wir machen durch die Indizes k, ϵ deutlich, daß die im O-Symbol implizit vorhandene Konstante auch von k und ε abhängen darf. Der O-Ausdruck ist stets für $n \to \infty$ zu lesen. Bei komplizierten Ausdrücken benutzen wir anstelle des O-Symbols auch das Symbol $\ll$ bzw. $\ll_{k,\varepsilon}$.

Beweis von Lemma 3.5.2. Wir beweisen die Behauptung zunächst für $k = 2$: nach Lemma 3.5.1 ist $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$, deshalb ist

$$\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} \;=\; \frac{\alpha_1 + 1}{p_1^{\epsilon\alpha_1}} \cdots \frac{\alpha_r + 1}{p_r^{\epsilon\alpha_r}} \,.$$

Für $p_s \leq 2^{\frac{2}{\epsilon}}$ haben wir

$$\frac{\alpha_s + 1}{p_s^{\alpha_s}} \;\leq\; \frac{\alpha_s + 1}{2^{\varepsilon\alpha_s}} \;\leq\; \frac{\alpha_s + 1}{\epsilon\alpha_s \log(2)} \;\leq\; \frac{2}{\epsilon \log(2)} \,,$$

und für $p_s > 2^{\frac{2}{\epsilon}}$ ist

$$\frac{\alpha_j + 1}{p_j \epsilon\alpha_j} \leq \frac{2}{\epsilon \log p_j} \leq 1.$$

Daher ist

$$\frac{\tau(n)}{n^\epsilon} \;\leq\; \left(\frac{2}{\epsilon \log(2)}\right)^{2^{\frac{2}{\epsilon}}} \,.$$

Damit ist der Fall $k = 2$ bewiesen. Für den allgemeinen Fall führen wir eine Induktion nach k: aus der Darstellung $n = (d_1 \cdots d_{k-1}) \cdot d_k$ ergibt sich die Rekursion

$$\tau_k(n) \;=\; \sum_{d_k | n} \tau_{k-1}\left(\frac{n}{d_k}\right) \;\leq\; \sum_{d_k | n} \tau_{k-1}(n) \;=\; \tau(n)\tau_{k-1}(n) \,.$$

□

3.6 Die Weylsche Ungleichung

Lemma 3.6.1. *Es sei $k \geq 1$, $K = 2^{k-1}$ und $\varepsilon > 0$. Es sei $P_k(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_0$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Wir setzen*

$$S \;=\; \sum_{n=1}^{N} e\left(P_k(n)\right) \,,$$

dann gilt

$$|S|^K \underset{k,\varepsilon}{\ll} N^{K-1} \;+\; N^{K-k+\varepsilon} \sum_{m=1}^{k!N^{k-1}} \min\left(N, \|m\alpha_k\|^{-1}\right) \,.$$

Beweis. Wir verwenden die Abschätzung

$$\left|\sin\left(\pi\alpha_k k! d_1 \cdots d_{k-1}\right)\right|^{-1} \;=\; O\left(\|\alpha_k k! d_1 \cdots d_{k-1}\|^{-1}\right)$$

und sammeln für $1 \leq n \leq k!N^k$ alle $(k-1)$-Tupel $(d_1, \ldots, d_{k-1})$, für die $k! d_1 \cdots d_{k-1} = n$ ist. Nach Lemma 3.5.2 gibt es $O_{k,\varepsilon}(N^\varepsilon)$ solche $(k-1)$-Tupel, daraus folgt die Behauptung. □

Wir gehen nun daran, die Summe in Lemma 3.6.1 abzuschätzen:

Lemma 3.6.2. *Es sei* $\alpha \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$ *und* $(a, q) = 1$, *sowie*

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \;\leq\; \frac{1}{q^2} \,.$$

Dann gilt für $U, n \in \mathbb{R}$ *die Abschätzung*

$$\sum_{1 \leq k \leq U} \min\left(n, \frac{1}{\|\alpha k\|}\right) \;\ll\; \left(q + U + n + \frac{Un}{q}\right) \cdot (1 + \log(q)) \;.$$

Beweis. Es sei $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$ mit $|\theta| \leq 1$. Wir unterteilen das Intervall $[1, U]$ in höchstens $(\frac{U}{q} + 1)$ Teilintervalle $I_l := [U_l, U_{l+1}]$ der Länge $\leq q$. Für ein festes l schätzen wir die Teilsumme

$$\Sigma_l \;:=\; \sum_{k \in I_l} \min\left(n, \frac{1}{\|\alpha k\|}\right)$$

ab. Für $m \in \mathbb{N}$ ist daher

$$\left| \left\{ k \in I_l \mid \|k\alpha\| \leq \frac{m}{q} \right\} \right| \;\leq\; 10m \,. \tag{1}$$

Wir zerlegen

$$\Sigma_l \;:=\; \sum_{k \in I_l} \min\left(n, \frac{1}{\|\alpha k\|}\right) \;=\; \Sigma_{l,1} \;+\; \Sigma_{l,2} \,, \tag{2}$$

wobei in $\Sigma_{l,1}$ über alle $k \in I_l$ mit $\min(n, \frac{1}{\|\alpha k\|}) = n$ summiert wird, und in $\Sigma_{l,2}$ über alle $k \in I_l$ mit $\min(n, \frac{1}{\|\alpha k\|}) = \frac{1}{\|\alpha k\|}$. Es gilt

$$\min\left(n, \frac{1}{\|\alpha k\|}\right) \;=\; n \;\;\Leftrightarrow\;\; \|\alpha k\| \;\leq\; \frac{1}{n} \;=\; \frac{q}{n} \cdot q^{-1} \,.$$

Die Anzahl dieser Terme ist $\ll \frac{q}{n} + 1$ nach (1). Damit ist

$$\Sigma_{l,1} \;\ll\; q + n \,. \tag{3}$$

Für $0 \leq s \leq \frac{\log(q)}{\log(2)}$ gibt es $\ll 2^s$ Werte $k \in I_l$ mit $\|k\alpha\| \leq 2^s q^{-1}$ wegen (1). Der Beitrag zur Summe $\Sigma_{l,2}$ ist $\ll \frac{2^s}{2^s q^{-1}} = q$. Summation über $0 \leq s \leq \frac{\log(q)}{\log(2)}$ ergibt

$$\Sigma_{l,2} \;\ll\; q \cdot (\log(q) + 1) \,. \tag{4}$$

Aus (2), (3) und (4) erhalten wir

$$\Sigma_l \;\ll\; (q + n) \cdot (\log(q) + 1) \,.$$

Summation über l ergibt

$$\sum_{1 \leq k \leq U} \min\left(n, \frac{1}{\|k\alpha\|}\right) \;\ll\; (q + n) \cdot \left(\frac{U}{q} + 1\right) \cdot (\log(q) + 1) \;=\; \left(q + U + n + \frac{Un}{q}\right) \cdot (1 + \log(q)) \,,$$

und damit die Behauptung von Lemma 3.6.2. □

Satz 3.6.1 (Weylsche Ungleichung). *Es sei $P_k(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_0$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $k \geq 1$, sowie*

$$S = \sum_{n=1}^{N} e\left(P_k(n)\right) \quad , \quad \left|\alpha_k - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2} .$$

Es sei $K = 2^{k-1}$ und $\varepsilon > 0$, dann ist

$$S \underset{k,\varepsilon}{\ll} N^{1+\varepsilon} \cdot \left(N^{-1} + q^{-1} + N^{-k} q\right)^{\frac{1}{K}} .$$

Beweis. Da $|S| \leq N$ ist folgt das Ergebnis sofort, falls $q \geq N^k$ ist. Wir können daher $1 \leq q \leq N^k$ annehmen, und damit $\log(q) \ll \log(N) \ll N^k$. Nach Lemma 3.6.1 ist

$$|S|^K \underset{k,\epsilon}{\ll} N^{K-1} + N^{K-k+\varepsilon} \sum_{m=1}^{k!N^{k-1}} \min\left(N, \|m\alpha_k\|^{-1}\right) .$$

Nach Lemma 3.6.2 ist

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{k!N^{k-1}} \min\left(N, \|m\alpha_k\|^{-1}\right) &\ll \left(q + k!N^{k-1} + N + \frac{k!N^k}{q}\right) \cdot (1 + \log(q)) \\ &\underset{k,\epsilon}{\ll} \left(q + N^{k-1} + \frac{N^k}{q}\right) \cdot \log(N) \underset{k,\epsilon}{\ll} N^k \cdot \left(qN^{-k} + N^{-1} + q^{-1}\right) \cdot N^{\epsilon}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$|S|^K \underset{k,\epsilon}{\ll} N^{K-1} + N^{K+\epsilon} \cdot \left(qN^{-k} + N^{-1} + q^{-1}\right) \ll N^{K+\epsilon} \cdot \left(qN^{-k} + N^{-1} + q^{-1}\right) .$$

□

3.7 Exponentialintegrale

Definition 3.7.1. Unter einem Exponentialintegral versteht man ein Integral der Form

$$\int_a^b g(x) e(f(x)) dx ,$$

wobei f und g auf dem Intervall $[a, b]$ stetig-differenzierbar sind.

Der einfachste Fall ist wiederum der, in dem f ein lineares Polynom und $g(x) = 1$ konstant ist. Hier läßt sich das Integral direkt auswerten. Dieser Fall liefert auch die Grundidee für die Behandlung des allgemeinen Falls. Es sei also $f(x) = \lambda_1 x + \lambda_0$ mit $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq 0$, dann ist

$$\int_a^b e(f(x)) dx = \frac{1}{2\pi i \lambda_1} \left(e(\lambda_1 b + \lambda_0) - e(\lambda_1 a + \lambda_0)\right) . \tag{3.1}$$

Insbesondere ist

$$\int_a^b e(f(x)) dx = O\left(\frac{1}{m}\right) ,$$

wobei m eine untere Schranke für die Größe der Ableitung $|f'(x)|$ ist: $|f'(x)| \geq m := \lambda_1$. Die Größe der Ableitung $f'(x)$ mißt die Schnelligkeit der Oszillation des Integranden $e(f(x))$. Die Funktion $e(\lambda_1 x + \lambda_0)$ hat die Periode $\frac{1}{|\lambda_1|} = \frac{2\pi}{|f'(x)|}$. Schnelle Oszillation des Integranden bewirkt einen kleinen Wert des Exponentialintegrals

$$\int_a^b e(f(x))dx\,.$$

Diese Beobachtung gilt auch für allgemeinere Situationen:

Lemma 3.7.1. *Es sei $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig-differenzierbar auf $[a, b]$. Es sei $\frac{g(x)}{f'(x)}$ monoton auf $[a, b]$ und $\left|\frac{f'(x)}{g(x)}\right| \geq m > 0$, dann gilt*

$$\left|\int_a^b g(x)e(f(x))dx\right| \;\leq\; \frac{6}{m}\,. \tag{1}$$

Beweis. Wir behandeln (1) zunächst für den Spezialfall $f(x) = x$ und schätzen

$$\int_a^b g(x)e(x)dx$$

mit g monoton und stetig-differenzierbar ab. Partielle Integration ergibt

$$\int_a^b g(x)e(x)dx \;=\; g(b)\left(\int_a^b e(x)dx\right) - \int_a^b g'(x)\left(\int_a^x e(u)du\right)dx \;\leq\; 2|g(b)| + 2(|g(a)| + |g(b)|) \;\leq\; \frac{6}{m}\,. \tag{2}$$

Im allgemeinen Fall substituieren wir $u = f(x)$ und definieren α, β durch $f(a) = \alpha$ und $f(b) = \beta$. Es sei $f^{-1}(u)$ die Umkehrfunktion von f. Wegen

$$\frac{df^{-1}(u)}{du} \;=\; \frac{1}{f'(f(u))}$$

erhalten wir aus (2)

$$\int_a^b g(x)e(f(x))dx \;=\; \int_\alpha^\beta e(u)\frac{g(f^{-1}(u))}{f'(f^{-1}(u))}du \;\leq\; \frac{6}{m}\,.$$

□

Als nächstes betrachten wir die Möglichkeit, daß die Ableitung $f'(x)$ im Exponentialintegral in einem Punkt c des Integrationsbereichs verschwindet: $f'(c) = 0$. Man sagt dann auch: $e(f(x))$ besitzt in $x = c$ eine <u>stationäre Phase</u>. Grob gesagt ist c ein Punkt, in dessen unmittelbarer Umgebung $e(f(x))$ nicht oszilliert.

Lemma 3.7.2. *Es sei $a < b$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sowie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig-differenzierbar. Auf $[a, b]$ sei $f'(x) \neq 0$, $\frac{g(x)}{f'(x)}$ monoton und $|g(x)| \leq M$ sowie $|f''(x)| \geq r$. Dann ist*

$$\left|\int_a^b g(x)e(f(x))dx\right| \;<\; \frac{12M}{\sqrt{r}}\,.$$

Beweis. Wegen $e(-f(x)) = \overline{e(f(x))}$ genügt es, sich auf den Fall $f''(x) \geq r > 0$ zu beschränken. Dann ist $f'(x)$ auf $[a, b]$ monoton wachsend. Es gibt dann höchstens einen Punkt $c \in [a, b]$ mit $f'(c) = 0$. In diesem Fall setzen wir $c_0 = c$. Falls $f'(x) > 0$ ist für alle $x \in [a, b]$ setzen wir $c_0 = a$, falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ ist setzen wir $c_0 = b$. Für $\delta > 0$ sei $c_1(\delta) = \max(a, c_0 - \delta)$ sowie $c_2(\delta) = \min(b, c_0 + \delta)$. Wir zerlegen das Exponentialintegral zu

$$\int_a^b g(x)e(f(x))dx \; = \; I_1 + I_2 + I_3$$

mit

$$I_1 \; = \int_a^{c_1(\delta)} g(x)e(f(x))dx \;\; , \;\; I_2 \; = \int_{c_1(\delta)}^{c_2(\delta)} g(x)e(f(x))dx \;\; , \;\; I_3 \; = \int_{c_2(\delta)}^{b} g(x)e(f(x))dx$$

und bestimmen $\delta > 0$ später. In I_1 und I_3 oszilliert $e(f(x))$ stark, in I_2 bzw. der Umgebung der stationären Phase dagegen schwach. Ist $c_1(\delta) = a$, so ist $I_1 = 0$. Andernfalls ist für $x \in [a, c_1(\delta)]$

$$|f'(x)| \; \geq \; \int_{c-\delta}^{c} |f''(x)|dx \; > \; \delta \cdot r \, .$$

Nach Lemma 3.7.1 ist dann $|I_1| \leq \frac{6M}{\delta r}$. Eine analoge Abschätzung ergibt $|I_3| \leq \frac{6M}{\delta r}$. Schließlich wird I_2 trivial abgeschätzt: $|I_2| \leq 2\delta M$. Insgesamt erhalten wir

$$\left| \int_a^b g(x)e(f(x))dx \right| \; \leq \; \frac{12M}{\delta r} \; + \; 2\delta M \, .$$

Wir wählen δ so, daß beide Terme gleich groß sind:

$$\delta \; = \; \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{r}} \, .$$

Dafür erhalten wir

$$\left| \int_a^b g(x)e(f(x))dx \right| \; \leq \; \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{r}} M \; < \; \frac{12M}{\sqrt{r}} \, .$$

□

3.8 Die Methode von van der Corput

Wir kommen nun zum zentralen Satz, der Exponentialsummen mit Summen über Exponentialintegrale vergleicht. Wegen wichtiger Anwendungen wollen wir etwas allgemeinere Summen der Form

$$\sum_{a<n\leq b} g(n)e(f(n))$$

betrachten, in denen g eine stetig-differenzierbare Funktion ist. Die Grundidee des Beweises ist die Anwendung der Poissonschen Summenformel

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(n) \; = \; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\Phi}(n)$$

mit der Fouriertransformierten

$$\hat{\Phi}(n) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) e(-nu) du \, ,$$

von Φ auf die Funktion

$$\Phi(u) = \begin{cases} g(u)e(f(u)), & \text{falls} \quad a < u \leq b \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion erfüllt nicht die Bedingung der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit in Satz 2.7.4. Daher kann Satz 2.7.4 nicht direkt angewendet werden.

Satz 3.8.1. *Es sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig-differenzierbar mit monotoner Ableitung $f'(x)$. $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei positiv, monoton fallend und stetig-differenzierbar, so daß $|g'(x)|$ monoton fallend ist. Ist $\alpha = f'(b)$ und $\beta = f'(a)$, so gilt*

$$\sum_{a<n\leq b} g(n)e(f(n)) \ = \ \sum_{\alpha-\eta<\nu\leq\beta+\eta} \int_a^b g(x)e(f(x)-\nu x)dx \ + \ O\left(g(a)\cdot\log(\beta-\alpha+2)\right) \ + \ O(|g'(a)|) \quad (1)$$

mit einer beliebigen Konstanten $0 < \eta < 1$.

Bemerkung 3.8.1. Die Summationsbedingung $\alpha - \eta < \nu \leq \beta + \eta$ besagt, daß die stationäre Phase des Integrals

$$\int_a^b g(x)e(f(x) - \nu x)dx$$

ins Innere des Intervalls (a, b) fällt (oder nicht weit davon entfernt ist):

$$\exists x_\nu \in (a,b) : \frac{d}{dx}(f(x_\nu) - \nu x_\nu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists x_\nu \in (a,b) : f'(x_\nu) = \nu \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = f'(b) \leq \nu \leq f'(a) = \beta$$

da f' stetig und monoton fallend ist.

Beweis von Satz 3.8.1. Wir können $\beta - \alpha \geq 10$ annehmen, zudem ist ohne Einschränkung $a = m_1 + \frac{1}{2}$ und $b = m_2 + \frac{1}{2}$ für $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Es sei nämlich $(\tilde{a}, \tilde{b})$ das größte in (a, b) enthaltene Teilintervall von der Form $(m_1 + \frac{1}{2}, m_2 + \frac{1}{2})$: wegen

$$\sum_{\alpha-\eta<\nu\leq\beta+\eta} e(f(t) - \nu t) \ \ll \ (\beta - \alpha + 2) + \frac{1}{\|t\|}$$

ändert sich die rechte Seite von (1) höchstens um

$$O\left(g(a) \cdot \left(\int_0^{(\beta-\alpha+2)^{-1}} (\beta - \alpha + 2)dt \ + \int_{(\beta-\alpha+2)^{-1}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} dt \right)\right) \ = \ O\left(g(a) \cdot \log(\beta - \alpha + 2)\right) \, .$$

Die linke Seite von (1) ändert sich um $O(g(a))$. Indem wir $f(x)$ gegebenenfalls durch $h(x) = f(x) - kx$ für $k \in \mathbb{Z}$ ersetzen, können wir zudem annehmen, daß $\eta - 1 < \alpha \leq \eta$ ist. Wie in Abschnitt 2.7 sind Dirichletkern D_n und Fejérkern F_n durch

$$D_N(x) \ = \ \sum_{k=-N}^{N} e(kx) \quad , \quad F_N(x) \ = \ \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} D_k(x) \, .$$

gegeben. Nach Satz 2.7.4 gilt für $\Phi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stetig

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\Phi(t)F_N(t)dt \;=\; \Phi(n) \tag{2}$$

für alle $n\in\mathbb{Z}$. Es ist klar, daß (2) auch schon gilt, wenn Φ auf $[n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]$ stetig ist. Wir wenden (2) an mit

$$\Phi(t)=\begin{cases} g(t)e(f(t)), & \text{falls}\quad a<t\le b\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

und erhalten

$$\sum_{a<n\le b} g(n)e(f(n)) \;=\; \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\sum_{\nu=-k}^{k}\int\limits_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)dt\,. \tag{3}$$

Es sei $I=(\alpha-\eta,\beta+\eta)$. Wir schätzen die Summe

$$\sum_{\substack{\nu=-k\\ \nu\notin I}}^{k}\int\limits_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)dt$$

ab. Wir haben

$$\int\limits_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)dt \;=\; \frac{1}{2\pi i}\left(J_1(\nu)-J_2(\nu)\right) \tag{4}$$

mit

$$J_1(\nu) \;:=\; \int\limits_a^b \frac{1}{f'(t)-\nu}\cdot\frac{d}{dt}\left(g(t)e(f(t)-\nu t)\right)dt \;\;,\;\; J_2(\nu) \;:=\; \int\limits_a^b \frac{g'(t)}{f'(t)-\nu}\cdot e\left(f(t)-\nu t\right)dt\,.$$

Wegen $e(\nu a)=e(\nu b)=(-1)^\nu$ und der Monotonie von $f'(x)-\nu$ haben wir für $\nu\notin I$

$$\begin{aligned} J_1(\nu) \;&=\; \left[g(t)\frac{e(f(t)-\nu t)}{f'(t)-\nu}\right]_a^b \;-\; \int\limits_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f'(t)-\nu}\right)dt\\ &=\; \frac{(-1)^{\nu+1}}{\alpha-\nu}g(b) \;-\; \frac{(-1)^{\nu+1}}{\beta-\nu}g(a) \;+\; O\left(g(a)\cdot\left|\frac{1}{\alpha-\nu}-\frac{1}{\beta-\nu}\right|\right)\,.\end{aligned}$$

Wir teilen die Summe

$$\sum_{\substack{n=-k\\ \nu\notin I}}^{k} J_1(\nu) \;=\; \Sigma_1 \;+\; \Sigma_2$$

auf mit

$$\Sigma_1 \;:=\; \sum_{\substack{\nu=-k\\ \nu\notin I\\ |\nu|\le 4(\beta-\alpha)}}^{k} J_1(\nu) \;\;,\;\; \Sigma_2 \;:=\; \sum_{\substack{\nu=-k\\ \nu\notin I\\ |\nu|>4(\beta-\alpha)}}^{k} J_1(\nu)\,.$$

Die alternierenden Summen $\sum \frac{(-1)^{\nu+1}}{\alpha-\nu}$ und $\sum \frac{(-1)^{\nu+1}}{\beta-\nu}$ sind $O(1)$ nach dem Leibniz-Kriterium. Für $|\nu| > 4(\beta-\alpha)$ ist $\frac{1}{\alpha-\nu} < \frac{2}{\nu}$ sowie $\frac{1}{\beta-\nu} < \frac{2}{\nu}$, und daher

$$\left|\frac{1}{\alpha-\nu} - \frac{1}{\beta-\nu}\right| \;\leq\; \frac{4(\beta-\alpha)}{\nu^2}\,.$$

Wir erhalten $\Sigma_1 \ll g(a)\cdot\log(\beta-\alpha+2)$ und $\Sigma_2 \ll g(a)$. Damit ist

$$\sum_{\substack{\nu=-k\\ \nu\notin I}}^{k} J_1(\nu) \;\ll\; g(a)\cdot\log(\beta-\alpha+2)\,. \tag{5}$$

Nach Lemma 3.7.1 ist

$$J_2(\nu) \;\ll\; |g'(a)|\cdot\left(\frac{1}{(\alpha-\nu)^2}+\frac{1}{(\beta-\nu)^2}\right) \tag{6}$$

und damit

$$\sum_{\substack{\nu=-k\\ \nu\notin I}}^{k} J_2(\nu) \;\ll\; |g'(a)|\,.$$

Aus (5) und (6) folgt

$$\sum_{\substack{\nu=-k\\ \nu\notin I}}^{k} \int_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)dt \;\ll\; g(a)\cdot\log(\beta-\alpha+2)+|g'(a)|\,,$$

also

$$\sum_{\nu=-k}^{k} \int_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)dt \;=\; \sum_{\alpha-\eta<\nu\leq\beta+\eta} \int_a^b g(t)e(f(t)-\nu t)dt \,+\, O\left(g(a)\cdot\log(\beta-\alpha+2)\right) \,+\, O(|g'(a)|).$$

Mit (3) folgt die Behauptung des Satzes. □

Satz 3.8.2. *Es sei $a<b$, $f:\,[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f'(x)$ monoton. Es sei $|f'(x)|\leq\theta<1$, dann gilt*

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) \;=\; \int_a^b e(f(x))dx \,+\, O_\theta(1)\,.$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $f'(x)$ als monoton fallend annehmen. Wir wenden Satz 3.8.1 mit $\eta<1-\theta$ an, dann wird die Summationsbedingung $\alpha-\eta<\nu\leq\beta+\eta$ entweder allein für $\nu=0$ oder für kein ν erfüllt. □

Satz 3.8.3 (Hardy-Littlewood-Approximation)**.** *Es sei $\sigma\geq\sigma_0>0$ und $|t|<\frac{2\pi x}{C}$ für ein festes $C>1$, dann gilt*

$$\zeta(s) \;=\; \sum_{n\leq x} n^{-s} \,-\, \frac{x^{1-s}}{1-s} \,+\, O_{\sigma_0,C}(x^{-\sigma})\,. \tag{HL}$$

Beweis. Nach der Eulerschen Summenformel gilt für $\sigma > 0$

$$\zeta(s) \;=\; \sum_{n=1}^{N} n^{-s} \;-\; s\int_{N}^{\infty} (u - [u] - \frac{1}{2})u^{-s-1}du \;-\; \frac{N^{1-s}}{1-s} \;-\; \frac{1}{2}N^{-s} \tag{1}$$

Wir wenden Satz 3.8.1 auf die Summe

$$\sum_{x<n\leq N} n^{-s}$$

an mit $f(u) = -\frac{t\log(u)}{2\pi}$ und $g(u) = u^{-s}$. Wegen der Bedingung $|t| < \frac{2\pi x}{C}$ gilt

$$\left|f'(u)\right| \;=\; \left|\frac{t}{2\pi u}\right| \;<\; 1$$

für $u > x$. Die Summationsbedingung $\alpha - \eta < \nu \leq \beta + \eta$ ist für den einzigen Term $\nu = 0$ erfüllt, und wir erhalten

$$\sum_{x<n\leq N} n^{-s} \;=\; \int_{x}^{N} u^{-s}du \;+\; O_{\sigma_0,C}(x^{-\sigma}) \;=\; -\frac{x^{1-s}}{1-s} \;+\; \frac{N^{1-s}}{1-s} \;+\; O_{\sigma_0,C}(x^{-\sigma})\,.$$

Die Behauptung (HL) folgt nun aus (1) für $N \to \infty$. □

3.9 Abschätzung von Weylschen Exponentialsummen nach van der Corput

Die Ergebnisse des vorigen Abschnitts können auf die Abschätzung von Weylschen Exponentialsummen

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n))$$

selbst angewendet werden, wenn man über geeignete Schranken für die zweite Ableitung f'' verfügt.

Satz 3.9.1. *Es sei $a < b$ mit $b \geq a + 1$. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig-differenzierbar und*

$$0 \;<\; \lambda_2 \;\leq\; |f''(x)| \;\leq\; h \cdot \lambda_2\,.$$

Dann ist

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) \;\ll\; h \cdot (b-a) \cdot \lambda_2^{\frac{1}{2}} \;+\; \lambda_2^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Beweis. Wir können $\lambda_2 < 1$ annehmen, da die Behauptung sonst trivial ist. Die Voraussetzungen von Satz 3.8.1 sind dann erfüllt. Es sei $f'(b) = \alpha$ sowie $f'(a) = \beta$. Nach Satz 3.8.1 ist mit beliebigem η und $0 < \eta < 1$ dann

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) \;=\; \sum_{a-\eta<\nu\leq\beta+\eta} \int_{a}^{b} e(f(x) - \nu x)dx \;+\; O(\log(\beta - \alpha + 2))\,.$$

Nach Lemma 3.7.2 ist

$$\int_{a}^{b} e(f(x) - \nu x)dx \;\ll\; \lambda_2^{-\frac{1}{2}} \tag{1}$$

für alle ν. Es ist

$$\beta - \alpha \;=\; f'(b) - f'(a) \;=\; O\left((b-a)\cdot h \cdot \lambda_2\right)\,, \tag{2}$$

und wegen

$$\log(\beta - \alpha + 2) \;=\; O(\log(\beta - \alpha + 2)) \;=\; O((b-a)\lambda_2) \;+\; O(1) \;=\; O((b-a)\cdot h \cdot \lambda_2^{\frac{1}{2}}) \;+\; O(1)\,.$$

folgt die Behauptung. □

Exponentialsummen können auch behandelt werden, indem man zuerst einen -oder mehrere- verallgemeinerte Weylschritte anwendet, und den van der Corput-Schritt (Satz 3.8.1) auf die daraus entstehenden neuen Exponentialsummen. Man kann die Schritte auch beliebig hintereinander schalten.

Satz 3.9.2 (Weylschritt)**.** *Es sei $f:\,[a,b]\to\mathbb{R}$, $a < u \le b$, $1 \le q \le b-a$, dann ist*

$$\left|\sum_{a<n\le b} e(f(n))\right| \;\ll\; \frac{b-a}{q^{\frac{1}{2}}} \;+\; \left(\frac{b-a}{q}\sum_{\nu=1}^{q-1}\left|\sum_{a<n\le b-\nu} e(f(n+\nu)-f(n))\right|\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Beweis. Wir definieren $e(f(n)) = 0$ falls $n \le a$ oder $n > b$ ist. Es ist

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n)) \;=\; \frac{1}{q}\sum_{a<n\le b}\sum_{\nu=1}^{q} e(f(n+\nu)) \;+\; \theta(q+1)$$

mit $|\theta| \le 1$. Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt

$$\left|\sum_{a<n\le b} e(f(n))\right|^2 \;\ll\; \frac{1}{q^2}\cdot(b-a)\cdot\sum_{a<n\le b}\left|\sum_{\nu=1}^{q} e(f(n+\nu))\right|^2\,. \tag{1}$$

Es ist

$$\sum_{a<n\le b}\left|\sum_{\nu=1}^{q} e(f(n+\nu))\right|^2 \;=\; \sum_{\nu_1=1}^{q}\sum_{\nu_2=1}^{q}\sum_{a<n\le b} e(f(n+\nu_2)-f(n+\nu_1)) \;=\; \Sigma_1 \;+\; 2\Sigma_2$$

mit

$$\Sigma_1 \;=\; \sum_{\substack{1\le\nu_1,\nu_2\le q\\ \nu_1=\nu_2}}\sum_{a<n\le b} e(f(n+\nu_2)-f(n+\nu_1))\;\;,\;\; \Sigma_2 \;=\; \sum_{\substack{1\le\nu_1,\nu_2\le q\\ \nu_1<\nu_2}}\sum_{a<n\le b} e(f(n+\nu_2)-f(n+\nu_1))\,.$$

Wir haben

$$\Sigma_1 \;\ll\; q(b-a)\,. \tag{2}$$

Für ein festes Paar (m,ν) mit $1 \le \nu \le q-1$ und $m \in \mathbb{Z}$ gibt es $(q-\nu)$ Tripel (n,ν_1,ν_2) mit $1 \le \nu_1 \le q$, $1 \le \nu_2 \le q$ und $n+\nu_1 = m$, $n+\nu_2 = m+\nu$. Also

$$\Sigma_2 \;=\; \sum_{\nu=1}^{q-1}(q-\nu)\sum_{m} e(f(m+\nu)-f(m)) \;\le\; q\sum_{\nu=1}^{q-1}\left|\sum_{m} e(f(m+\nu)-f(m))\right|\,. \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt die Behauptung. □

So wie in der Weylschen Methode die Polynome k-ten Grades P_k im Weylschritt durch die Anwendung der Differenzenoperatoren Δ_ν durch Polynome $(k-1)$-ten Grades $\Delta_\nu(P_k)$ ersetzt werden, so können jetzt Funktionen f, für deren k-te Ableitung Schranken gegeben sind, durch Funktionen $\Delta_\nu(f)$ ersetzt werden, für deren $(k-1)$-te Ableitung Schranken vorliegen.

Satz 3.9.3. *Es sei $a < n \leq b$ mit $b - a \geq 1$. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dreimal stetig-differenzierbar und*

$$\lambda_3 \;\leq\; |f'''(x)| \;\leq\; h \cdot \lambda_3\,,$$

dann ist

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) \;\ll\; h^{\frac{1}{2}} \cdot (b-a) \cdot \lambda_3^{\frac{1}{6}} \;+\; (b-a)^{\frac{1}{2}} \lambda_3^{-\frac{1}{6}}\,.$$

Beweis. Wir können $\lambda_3 \leq 1$ und $\lambda_3^{-\frac{1}{3}} \leq b - a$ voraussetzen, da sonst die Behauptung trivial ist. Es sei

$$g(x) \;=\; \Delta_\nu(f)(x) \;=\; f(x+\nu) - f(x)\,,$$

dann ist

$$g''(x) \;=\; f''(x+\nu) - f''(x) \;=\; \nu \cdot f'''(x+\theta\nu) \tag{1}$$

mit $0 < \theta < 1$ nach dem Mittelwertsatz. Nach dem Weylschritt 3.9.2 haben wir

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) \;\ll\; \frac{b-a}{q^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{b-a}{q} \sum_{\nu=1}^{q-1} \left| \sum_{a<n\leq b-\nu} \Delta_\nu(f)(n) \right| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mit Satz 3.9.1 und (1) folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) \;&\ll\; \frac{b-a}{q^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{b-a}{q} \sum_{\nu=1}^{q-1} \left(h(b-a)\nu^{\frac{1}{2}}\lambda_3^{\frac{1}{2}} + \nu^{-\frac{1}{2}}\lambda_3^{-\frac{1}{2}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll\; \frac{b-a}{q^{\frac{1}{2}}} + \left(h(b-a)^2 q^{\frac{1}{2}} \lambda_3^{\frac{1}{2}} + (b-a) q^{-\frac{1}{2}} \lambda_3^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll\; (b-a)q^{-\frac{1}{2}} \;+\; h^{\frac{1}{2}}(b-a) q^{\frac{1}{4}} \lambda_3^{\frac{1}{4}} \;+\; (b-a)^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{4}} \lambda_3^{-\frac{1}{4}}\,.
\end{aligned}$$

Die beiden ersten Terme sind von der selben Größenordnung (in λ_3), wenn $q = [\lambda_3^{-\frac{1}{3}}]$ ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Wir behandeln nun den allgemeinen Fall, in dem Schranken für die k-te Ableitung existieren. Im Hinblick auf Anwendungen ist es wichtig, daß die in den O- und $\ll$-Abschätzungen impliziten Konstanten unabhängig von k gewählt werden können.

Satz 3.9.4. *Es sei $k \geq 3$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ k-mal stetig-differenzierbar, sowie*

$$\lambda_k \;\leq\; |f^{(k)}(x)| \;\leq\; h \cdot \lambda_k \;\;,\;\; b-a \;\geq\; 1 \;\;,\;\; K = 2^{k-1}\,,$$

dann ist

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) \;\ll\; h^{\frac{2}{K}} (b-a) \lambda_k^{\frac{1}{(2K-2)}} \;+\; (b-a)^{1-\frac{2}{K}} \lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}}\,.$$

Beweis. Wir können wieder $\lambda_k < 1$ und $f^{(k)}(x) > 0$ annehmen. Außerdem können wir

$$2\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}} \;\le\; b-a \tag{1}$$

annehmen, da sonst $\lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}} \ge \frac{1}{2}(b-a)^{\frac{1}{2}}$, also $(b-a)^{1-\frac{1}{2K}}\lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}} \ge \frac{1}{2}(b-a)$ ist. Wir führen den Beweis durch Induktion nach k. Der Fall $k=3$ ist Satz 3.9.3, es bleibt also noch der Schritt $k-1 \to k$ zu zeigen. Dazu sei $g(x) = f(x+\nu) - f(x)$, dann ist

$$g^{(k-1)}(x) \;=\; f^{(k-1)}(x+\nu) \;-\; f^{(k-1)}(x) \;=\; \nu \cdot f^{(k)}(\xi)$$

mit $x < \xi < x+\nu$ nach dem Mittelwertsatz. Deshalb gilt

$$\nu\lambda_k \;\le\; g^{(k-1)}(x) \;\le\; h\nu\lambda_k\,.$$

Nach Induktionsannahme folgt

$$\left|\sum_{a<n\le b} e(g(n))\right| \;<\; A_1 h^{\frac{4}{K}}(b-a)(\nu\lambda_k)^{\frac{1}{K-2}} \;+\; A_2(b-a)^{1-\frac{4}{K}}\cdot(\nu\lambda_k)^{-\frac{1}{K-2}}$$

mit absoluten Konstanten $A_1, A_2 > 0$. Deshalb gilt für $1 \le q \le b-a$:

$$\sum_{\nu=1}^{q-1}\left|\sum_{a<n\le b-\nu} e(g(n))\right| \;<\; A_1 h^{\frac{4}{K}}(b-a)q^{1+\frac{1}{K-2}}\lambda_k^{\frac{1}{K-2}} \;+\; 2A_2(b-a)^{1-\frac{4}{K}}q^{1-\frac{1}{K-2}}\lambda_k^{-\frac{1}{K-2}}\,, \tag{2}$$

da wegen $k \ge 4$

$$\sum_{\nu=1}^{q-1}\nu^{-\frac{1}{K-2}} \;<\; \int_0^q u^{-\frac{1}{K-2}}\,du \;=\; \frac{q^{1-\frac{1}{K-2}}}{1-\frac{1}{K-2}} \;\le\; 2q^{1-\frac{1}{K-2}}$$

gilt. Nach dem Weylschritt 3.9.2 und (2) folgt mit absoluten Konstanten $A_3, A_4 > 0$:

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n))$$

$$\le\; A_3(b-a)q^{-\frac{1}{2}} \;+\; A_4(b-a)^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(A_1 h^{\frac{4}{K}}(b-a)q^{1+\frac{1}{K-2}}\lambda_k^{\frac{1}{K-2}} + 2A_2(b-a)^{1-\frac{4}{K}}q^{1-\frac{1}{K-2}}\lambda_k^{-\frac{1}{K-2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\; A_3(b-a)q^{-\frac{1}{2}} \;+\; A_4A_1^{\frac{1}{2}}h^{\frac{2}{K}}(b-a)q^{\frac{1}{2K-4}}\lambda_k^{\frac{1}{2K-4}} \;+\; A_4(2A_2)^{\frac{1}{2}}(b-a)^{1-\frac{2}{K}}q^{-\frac{1}{2K-4}}\lambda_k^{-\frac{1}{2K-4}}\,.$$

Wir wählen nun $q = q(\lambda_k)$ so, daß in den ersten beiden Termen die gleiche Potenz von λ_k auftritt, d.h. $q = [\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}}] + 1$. Die Bedingung $q \le b-a$ in Satz 3.9.2 ist wegen (1) erfüllt. Es ist

$$\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}} \;\le\; q \;\le\; 2\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}}\quad,\quad q^{\frac{1}{2K-4}}\lambda_k^{\frac{1}{2K-4}} \;\le\; 2^{\frac{1}{2K-4}}\lambda_k^{\frac{1}{2K-4}(1-\frac{1}{K-1})} \;\le\; 2\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}}\,,$$

und wir erhalten

$$\left|\sum_{a<n\le b} e(f(n))\right| \;\le\; \left(A_3 + 2A_4A_1^{\frac{1}{2}}\right)h^{\frac{2}{K}}(b-a)\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} \;+\; A_4(2A_2)^{\frac{1}{2}}(b-a)^{1-\frac{2}{K}}\lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}}\,.$$

Bis auf die Konstanten ist dies die Behauptung für k. Wenn A_1 und A_2 hinreichend groß sind, ist

$$A_3 + 2A_4A_1^{\frac{1}{2}} \;\le\; A_1 \quad,\quad A_4(2A_2)^{\frac{1}{2}} \;\le\; A_2\,,$$

womit der Induktionsschluß $k-1 \to k$ durchgeführt ist. □

Eine wichtige Anwendung dieses Resultats ist die Abschätzung der Riemannschen Zeta-Funktion im kritischen Streifen:

Satz 3.9.5. *Es sei $l \geq 3$ und $L = 2^{l-1}$, für $\sigma = 1 - \frac{l}{2L-2}$ gilt dann*

$$\zeta(\sigma + it) \ \ll \ |t|^{\frac{1}{2L-2}} \cdot \log |t| \, ,$$

wobei die O-Konstante von l unabhängig ist.

Beweis. Es genügt, den Beweis für $t \geq 0$ zu führen. Wir gehen von der Hardy-Littlewood-Abschätzung (Satz 3.8.3)

$$\zeta(s) \ = \ \sum_{n \leq x} n^{-s} \ - \ \frac{x^{1-s}}{1-s} \ + \ O_{\sigma,C}\left(x^{-\sigma}\right) \tag{1}$$

aus für $\sigma = \sigma_0 > 0$, $t < \frac{2\pi x}{C}$, und können $\sigma_0 \geq \frac{1}{2}$ annehmen. Wir wenden Satz 3.9.4 an mit

$$f(x) \ = \ -\frac{t \cdot \log(x)}{2\pi} \quad , \quad f^{(k)}(x) \ = \ \frac{(-1)^k (k-1)! \cdot t}{2\pi x^k} \, .$$

Für $a < n \leq b \leq 2a$ ist

$$\frac{(k-1)! \cdot t}{2\pi (2a)^k} \ \leq \ \left| f^{(k)}(n) \right| \ \leq \ \frac{(k-1)! \cdot t}{2\pi a^k} \, .$$

Die Voraussetzungen von Satz 3.9.4

$$\lambda_k \ \leq \ \left| f^{(k)}(x) \right| \ \leq \ h \cdot \lambda_k$$

sind also erfüllt mit der Wahl

$$\lambda_k \ = \ \frac{(k-1)! \cdot t}{2\pi(2a)^k} \quad , \quad h \ = \ 2^k \, .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{a<n\leq b} n^{-it} \ &\ll \ 2^{\frac{2k}{K}} \cdot a \cdot \left(\frac{(k-1)! \cdot t}{2\pi(2a)^k} \right)^{\frac{1}{2K-2}} \ + \ a^{1-\frac{2}{K}} \cdot \left(\frac{(k-1)! \cdot t}{2\pi(2a)^k} \right)^{-\frac{1}{2K-2}} \\ &\ll \ a^{1-\frac{k}{2K-2}} \cdot t^{\frac{1}{2K-2}} + a^{1-\frac{2}{K}+\frac{k}{2K-2}} \cdot t^{-\frac{1}{2K-2}} \, . \end{aligned}$$

Die beiden Terme sind gleich, falls $a = t^{\frac{K}{kK-2K+2}}$ ist. Falls daher

$$a \ < \ A \cdot t^{\frac{K}{kK-2K+2}} \tag{2}$$

mit einer absoluten Konstanten $A > 0$ gilt, kann der zweite Term weggelassen werden. Gilt (2), so folgt durch partielle Summation

$$\sum_{a<n\leq b} n^{-s} \ \ll \ a^{1-\sigma-\frac{k}{2K-2}} \cdot t^{\frac{1}{2K-2}}$$

und mit $\sigma = 1 - \frac{l}{2L-2}$ dann

$$\sum_{a<n\leq b} n^{-s} \ \ll \ a^{\frac{l}{2L-2}-\frac{k}{2K-2}} \cdot t^{\frac{1}{2K-2}} \, . \tag{3}$$

Wir wenden dies mit $k := l$ an und erhalten

$$\sum_{a<n\leq b} n^{-s} \ \ll \ t^{\frac{1}{2L-2}} \tag{4}$$

für $a < A \cdot t^{\frac{L}{lL-2L+2}}$. Daraus folgt

$$\sum_{n \le t^{\frac{L}{lL-2L+2}}} = \sum_j \sum_n n^{-s} ,$$

wobei über die (j,n) summiert wird mit

$$1 \le 2^j \le t^{\frac{L}{lL-2L-1}} \quad , \quad 2^{-j-1} \cdot t^{\frac{L}{lL-2L+2}} < n \le 2^{-j} \cdot t^{\frac{L}{lL-2L+2}} .$$

Da über $O(\log(t))$ Werte von j summiert wird ist wegen (4)

$$\sum_{n \le t^{\frac{L}{lL-2L+2}}} n^{-s} \ll t^{\frac{1}{2L-2}} \cdot \log(t) . \tag{5}$$

Wir behandeln nun die Summe

$$\sum_{t^{\frac{L}{lL-2L+2}} < n \le t} = \sum_j \sum_{2^{-j}t < n \le 2^{1-j}t} ,$$

wobei über alle j summiert wird mit

$$t^{\frac{L}{lL-2L+2}} \le 2^{-j}t \le t .$$

Zu jedem j gibt es ein $k < l$, so daß

$$t^{\frac{K}{(k+1)K-2K+1}} < 2^{-j}t \le t^{\frac{K}{kK-2K+2}} .$$

Dann ist nach (3)

$$\sum_{2^{-j}t < n \le 2^{1-j}t} n^{-s} \ll \exp\left(\log(t) \cdot \left(\left(\frac{l}{2L-2} - \frac{k}{2K-2}\right) \cdot \frac{K}{(k+1)K-2K+1} + \frac{1}{2K-2}\right)\right) . \tag{6}$$

Nun ist $2^{l-k} \ge l-k$ und daher $(L-K) \ge (l-k)K$. Daraus folgt weiter $(K-1)(L-K) \ge (K-1)(l-k)$ und

$$-k(L-K)K - (L-K)K + (K-L)(1-2K) \ge ((l-k)K - k(L-K) + (k-l)K)$$

und schließlich

$$\left(\frac{l}{2L-2} - \frac{k}{2K-2}\right) \cdot \frac{K}{(k+1)K-2K+1} + \frac{1}{2K-2} \le \frac{1}{2L-2} . \tag{7}$$

Aus (5), (6) und (7) folgt die Behauptung. □

Diese Abschätzung läßt sich nun zur Vergrößerung der nullstellenfreie Zone verwenden:

Satz 3.9.6 (Nullstellenfreie Zone, 2. Version)**.** *Es gibt eine absolute Konstante $A_0 > 0$, so daß für $t \ge 0$ und $\sigma \ge 1 - A_0 \frac{\log t}{\log\log t}$ gilt: $\zeta(s) \ne 0$ und*

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O\left(\frac{\log^2 t}{\log\log t}\right) .$$

Beweis. Nach Satz 3.9.5 ist
$$\zeta(s) \ \ll \ t^{\frac{1}{2L-2}} \cdot \log(t) \tag{1}$$
für $\sigma = 1 - \frac{l}{2L-2}$ und $l \geq 3$. Es sei $t \geq t_0$ gegeben. Die folgende Definition und die Abschätzungen gelten für hinreichend großes t_0. Wir setzen
$$l \ = \ \left[\frac{1}{\log(2)} \cdot \log\left(\frac{\log(t)}{\log(\log(t))}\right)\right]$$
und nehmen $l \geq 3$ an. Dann ist
$$L \ \leq \ 2^{\frac{1}{\log(2)}\log\left(\frac{\log(t)}{\log(\log(t))}\right)-1} \ = \ \frac{1}{2} \cdot \frac{\log(t)}{\log(\log(t))} \ ,$$
sowie
$$L \ \geq \ \frac{1}{4} \cdot \frac{\log(t)}{\log(\log(t))} \ .$$
Deshalb
$$\frac{l}{2L-2} \ \geq \ \frac{l}{2L} \ \geq \ \frac{\log(\log(t)) - \log(\log(\log(t))) - \log(2)}{\log(2)} \cdot \frac{\log(\log(t))}{\log(t)} \ \geq \ \frac{(\log(\log(t)))^2}{\log(t)} \ .$$
Deshalb ist $\sigma \geq 1 - \frac{l}{2L-2}$, falls $\sigma \geq 1 - \frac{(\log(\log(t))^2}{\log(t)}$ ist. Nach (1) folgt
$$\zeta(s) \ \ll \ t^{\frac{1}{2L-2}} \cdot \log(t) \ \ll \ t^{\frac{1}{L}} \cdot \log(t) \ \ll \ t^{\frac{4\log(\log(t))}{\log(t)}} \cdot \log(t) \ = \ \log(t)^5 \ .$$
Wir wenden jetzt Satz 2.11.5 an mit
$$\theta(t) \ = \ \frac{(\log(\log(t)))^2}{\log(t)} \quad , \quad \Phi(t) \ = \ 5\log(\log(t))$$
und erhalten die Behauptung nach entsprechender Wahl der Vorkonstanten. Daß auch die Nebenbedingungen aus Satz 2.11.5 erfüllt sind rechnet man leicht nach. □

Diese verbesserte nullstellenfreie Zone übersetzt sich in ein verbessertes Restglied:

Satz 3.9.7 (Primzahlsatz mit Restglied, 2. Version)**.** *Es gibt Konstanten* $c_0, c_1 > 0$ *mit*
$$\psi(x) \ = \ x \ + \ O\left(x \cdot \exp\left(-c_0 \cdot \sqrt{\log(x)\log(\log(x))}\right)\right) \ , \tag{PZ2a}$$
$$\pi(x) \ = \ \mathrm{li}(x) \ + \ O\left(x \cdot \exp\left(-c_1 \cdot \sqrt{\log(x)\log(\log(x))}\right)\right) \ . \tag{PZ2b}$$

Beweis. Wie in der ersten Version **??** brauchen wir nur die Abschätzung für $\psi(x)$ zu zeigen. Es sei also $T = T(x) > 1$, $c = c(x) = 1 + \frac{1}{\log(x)}$, $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$. T wird später so gewählt, daß wir das optimale Ergebnis erhalten. Nach Lemma 2.11.2 ist
$$\psi(x) \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds \ + \ O\left(\frac{x \cdot \log(x)^2}{T}\right) \ . \tag{2}$$
Wir ergänzen den Integrationsweg $[c - iT, c + iT]$ zur geschlossenen Kurve
$$\mathcal{C} \ = \ [c-iT, c+iT] \ \cup \ [c+iT, a+iT] \ \cup \ [a+iT, a-iT] \ \cup \ [a-iT, c-iT]$$

mit $a = 1 - A_0 \frac{\log(\log(T))}{\log(T)}$, wobei A_0 die Konstante aus dem vorhergehenden Satz ist. Es ist nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; Res_{s=1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} \right) \;=\; x \, . \tag{3}$$

Nach Satz 2.11.5 ist

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; O\left(\frac{\log(t)^2}{\log(\log(t))} \right)$$

für die Wahlen von Φ und θ im Beweis des vorigen Satzes, daraus folgen die Abschätzungen

$$\int\limits_{c+iT}^{a+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(\frac{x \cdot \log(T)^2}{T \cdot \log(\log(T))} \right) \, , \tag{4}$$

$$\int\limits_{a-iT}^{c-iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(\frac{x \cdot \log(T)^2}{T \cdot \log(\log(T))} \right) \, , \tag{5}$$

sowie

$$\int\limits_{a-iT}^{a+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \;=\; O\left(x \cdot \exp\left(-A_0 \frac{\log(x)}{\log(T)} \cdot \log(\log(T)) \right) \cdot \frac{\log(T)^3}{\log(\log(T))} \right) \, . \tag{6}$$

Die Restglieder in (4) und (5) sind monoton fallend in $T = T(x)$, während das Restglied in (6) in T monoton wächst. Das optimale Resultat wird nun erreicht, wenn (unter Vernachlässigung der Logarithmen die nicht in der Exponentialfunktion stehen)

$$\frac{x}{T} \;=\; x \cdot \exp\left(-A_0 \frac{\log(x)}{\log(T)} \cdot \log(\log(T)) \right)$$

gilt, wir wählen also eine Funktion $T = T(x)$ mit

$$\frac{\log(T)^2}{\log(\log(T))} \;=\; \log(x) \quad \text{bzw.} \quad \log(T) \;=\; \sqrt{\log(x) \cdot \log(\log(x))} \tag{7}$$

bis auf multiplikative Konstanten und erhalten aus (2)-(7) das verbesserte Restglied

$$\psi(x) \;=\; x \;+\; O\left(x \cdot \exp\left(-c_0 \cdot \sqrt{\log(x) \log(\log(x))} \right) \right) \, . \tag{8}$$

$\square$

Kapitel 4

Primzahlen in Restklassen

4.1 Dirichletsche L- Reihen

Definition 4.1.1. (Dirichletcharakter)
Es sei $q \in \mathbb{N}$ und $\tilde{\chi}$ sei ein Charakter der Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$. Die arithmetische Funktion $\chi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \to \chi(n)$ sei durch

$$\chi(n) = \begin{cases} \tilde{\chi}\ (n \bmod q), & \text{falls} \quad ggT(n,q) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Dieses χ heißt <u>Dirichletcharakter</u> $\bmod q$.
Ist $\tilde{\chi}$ der triviale Charakter von $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$, so heißt χ der <u>Hauptcharakter</u> $\bmod q$ und wird mit χ_0 bezeichnet.

Satz 4.1.1. *Es gibt $\varphi(q)$ Dirichletcharaktere* $\bmod q$.
Es gilt:

(i) *(Orthogonalitätsrelation 1. Art):*

$$\sum_{n \bmod q} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(q), & \textit{falls} \quad \chi = \chi_0 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

und

$$\sum_{n \bmod q} \chi_1(n) \cdot \overline{\chi_2(n)} = \begin{cases} \varphi(q), & \textit{falls} \quad \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

(ii) *(Orthogonalitätsrelation 2. Art):*

$$\sum_{\chi \bmod q} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(q), & \textit{falls} \quad n \equiv 1 \bmod q \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

und

$$\sum_{\chi \bmod q} \chi_1(n) \cdot \overline{\chi_2(n)} = \begin{cases} \varphi(q), & \textit{falls} \quad n_1 \equiv n_2 \bmod q \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 1.2.2, 1.2.3 und 1.2.5. □

Definition 4.1.2. (Dirichletsche L- Reihe)
Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter mod q. Unter der Dirichletschen L- Reihe $L(s, \chi)$ zu χ versteht man

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}.$$

Satz 4.1.2. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Dann ist $L(s, \chi)$ für $\sigma > 1$ normal konvergent und für $\chi \neq \chi_0$ sogar für $\sigma > 0$. Somit stellt $L(s, \chi)$ für $\sigma > 1$ (bzw. für $\sigma > 0$ im Falle $\chi \neq \chi_0$) eine holomorphe Funktion dar.*
Für $\sigma > 1$ gilt die Eulerproduktdarstellung

$$L(s, \chi) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \chi(p) p^{-s}}.$$

Insbesondere ist $L(s, \chi) \neq 0$ für $\sigma > 1$. Im Fall $\chi = \chi_0$ ist

$$L(s, \chi) = \zeta(s) \cdot \prod_{p | q} \left(1 - p^{-s}\right).$$

Daher kann $L(s, \chi_0)$ zu einer in $\sigma > 0$ meromorphen Funktion fortgesetzt werden.

Beweis. Mit partieller Summation gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \lim_{N \to \infty} \left(N^{-s} - \sum_{n \leq N} \chi(n) \right) - s \cdot \int_1^{\infty} \left(\sum_{n \leq u} \chi(n) \right) u^{-s-1} \, du. \qquad (1)$$

Für $\chi \neq \chi_0$ und $l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=lq+1}^{(l+1)q} \chi(n) = 0 \Rightarrow \forall u \colon \left| \sum_{n \leq u} \chi(n) \right| \leq q.$$

Damit konvergiert die rechte Seite von (1) für $\sigma > 0$ normal. Die Eulerproduktdarstellung folgt aus Satz 2.5.8. Es ist

$$\chi_0(p) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad p | q \\ 1, & \text{falls} \quad p \nmid q. \end{cases}$$

Also gilt für $\sigma > 1$

$$L(s, \chi_0) = \prod_{p \nmid q} (1 - p^{-s})^{-1} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{s})^{-1} \cdot \prod_{p | q} (1 - p^{-s})^{-1} = \zeta(s) \cdot \prod_{p | q} (1 - p^{-s})^{-1}.$$

□

4.2 Primzahlen in arithmetischen Progressionen

Es sei $q \in \mathbb{N}$, $(l, q) = 1$ und $l \bmod q = \{l, l+q, \ldots, l+mq\}$ eine Restklasse (arithmetische Progression) modulo q.
Enthält $l \bmod q$ unendlich viele Primzahlen?
Dies wurde 1834 von Dirichlet bewiesen. Sein Ergebnis folgt aus einer Gleichverteilungseigenschaft:
Es sei $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ die Folge der Primzahlen, die q nicht teilen. Wir betrachten nun wie in Definition 1.3.1 die Zählfunktion

$$N(x, l \bmod q) = |\{n \leq x \colon p_n \bmod q = l \bmod q\}|.$$

Dirichlets Ergebnis würde folgen, wenn gezeigt werden könnte, daß die Folge ($p_n \bmod q$) auf $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z},\cdot)^*$ gleichverteilt ist, d.h. wenn

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\cdot N(x, l \bmod q) = \frac{1}{\varphi(q)}$$

für alle l mit $(l,q)=1$ gilt. Dies würde wiederum nach Satz 1.3.1 folgen, wenn gezeigt werden könnte, daß für jedes $\chi \bmod q$ mit $\chi \neq \chi_0$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\cdot \sum_{n\le x}\chi(p_n) = 0$$

gelten würde.

Dirichlet hat sein Ergebnis mit einer Abwandlung dieser Methode gezeigt. Wir geben im folgenden seinen Beweisgang mit gewissen Vereinfachungen wieder. Der Beweis benutzt nur reelle Analysis.

Satz 4.2.1. *Es sei $q\in\mathbb{N}$, $(l,q)=1$ und $\sigma>1$. Dann gilt*

$$\sum_{n\equiv l \bmod q}\Lambda(n)n^{-\sigma} = \frac{1}{\varphi(n)}\sum_{\chi \bmod q}\overline{\chi(l)}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)n^{\sigma}.$$

Beweis. Nach der Orthogonalitätsrelation 2. Art ist

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\chi(n)\overline{\chi(l)} = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad n\equiv l \bmod q\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

□

Satz 4.2.2. *Für $q\in\mathbb{N}$, $\chi \bmod q$ und $\sigma>1$ gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)n^{-\sigma} = -\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)}.$$

Beweis. Der Beweis des Ergebnisses von Satz 2.11.1, in dem $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-s}$ durch Betrachten des Eulerprodukts für $\zeta(s)$ gezeigt wird, kann mit minimalen Änderungen, dem Hinzufügen des Faktors $\chi(n)$, übertragen werden. □

Satz 4.2.3. *Es sei $q\in\mathbb{N}$ und $z(q)$ die Anzahl der Dirichletcharaktere $\chi \bmod q$, für die $L(1,\chi)=0$ ist, wobei die Nullstellen mit Vielfachheiten gezählt werden. Dann ist*

$$\lim_{\sigma\to1^+}\left((\sigma-1)\cdot\sum_{n\equiv1 \bmod q}\Lambda(n)n^{-\sigma}\right) = \frac{1}{\varphi(q)}(1-z(q)).$$

Beweis. Wir verwenden im folgenden die Tatsache, daß $L(s,\chi)$ für $\chi\neq\chi_0$ und $L(s,\chi_0)-\frac{1}{\sigma-1}$ Taylorentwicklungen um den Punkt σ_0-1 besitzen. Dies folgt aus der Homomorphie dieser Funktionen aus Satz 4.1.2, läßt sich jedoch auch mit reeller Analysis beweisen, worauf wir jedoch nicht eingehen werden. Es ist für $\sigma>1$

$$\sum_{n\equiv1 \bmod q}\Lambda(n)n^{-\sigma} = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\left(-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)}\right). \tag{1}$$

Weiter gilt

$$L(\sigma,\chi)\neq 0 \Rightarrow \frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)} = O(1), \quad (\sigma\to 1^+). \tag{2}$$

Es habe $L(\sigma,\chi)$ eine Nullstelle der Vielfachheit m_χ in $\sigma=1$. Dann haben $L(\sigma,\chi)$ und $L'(\sigma,\chi)$ die Taylorentwicklungen

$$\begin{aligned} L(\sigma,\chi) &= c_{m_\chi}(\sigma-1)^{m_\chi} + c_{m_\chi+1}(\sigma-1)^{m_\chi+1}+\dots \\ L'(\sigma,\chi) &= m_\chi c_{m_\chi}(\sigma-1)^{m_\chi-1}+\dots \end{aligned}$$

um $\sigma_0=1$ mit $c_{m_\chi}\neq 0$. Also gilt

$$\lim_{\sigma\to 1^+}\left((\sigma-1)\cdot\left(-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)}\right)\right) = -m_\chi. \tag{3}$$

Außerdem ist

$$\lim_{\sigma\to 1^+}\left((\sigma-1)\cdot\left(-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}\right)\right) = 1. \tag{4}$$

Aus (1), (2), (3) und (4) folgt die Behauptung. □

Definition 4.2.1. Der Dirichletcharakter $\chi \bmod q$ heißt reell, falls $\chi(n)\in\mathbb{R}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ ist, andernfalls komplex.

Satz 4.2.4. *Es gilt für $n\in\mathbb{N}$:*

(i) Für höchstens ein $\chi \bmod q$ ist $L(1,\chi)=0$.

(ii) Für komplexes χ ist $L(1,\chi)\neq 0$.

Beweis. Wegen

$$\lim_{\sigma\to 1^+}\left((\sigma-1)\cdot\sum_{n\equiv 1 \bmod n}\Lambda(n)n^{-\sigma}\right)\geq 0$$

folgt Teil (i) aus Satz 4.2.3.
Aus $L(1,\chi)=0$ folgt auch $L(1,\overline{\chi})=0$. Wegen $\chi\neq\overline{\chi}$ für komplexe χ, folgt (ii) aus (i). □

Wir zeigen nun im folgenden, daß $L(1,\chi)$ auch für die reellen χ gilt:

Satz 4.2.5. *Es sei $\chi\neq\chi_0$ und χ reell. Dann gilt*

(i)

$$\left|L(1,\chi)-\sum_{n\leq x}\chi(n)n^{-1}\right| \ll_q x^{-1}$$

und

(ii)

$$\left|L\left(\frac{1}{2},\chi\right)-\sum_{n\leq x}\chi(n)n^{-1/2}\right| \ll_q x^{-1/2}.$$

Beweis. Es sei $\sigma > 0$. Abelsche partielle Summation ergibt

$$\left| L(\sigma, \chi) - \sum_{n \le x} \chi(n) n^{-\sigma} \right| = \sigma \cdot \int_x^\infty \left(\sum_{x < n \le u} \chi(n) \right) u^{-s-1}\, du \ll_q x^{-\sigma}.$$

□

Satz 4.2.6. *Für reelles $\chi \neq \chi_0$ ist $L(1, \chi) \neq 0$.*

Beweis. Es sei

$$F(n) = \sum_{d|n} \chi(d).$$

Die Funktion F ist multiplikativ. Wir untersuchen die Werte von F für Primzahlpotenzen p^ν:

$$F(p^\nu) = \sum_{0 \le \nu' \le \nu} \chi(p^{\nu'}) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad p|q \\ \nu+1, & \text{falls} \quad \chi(p) = 1 \\ 0, & \text{falls} \quad \chi(p) = -1 \quad \text{und } \nu \text{ ungerade} \\ 1, & \text{falls} \quad \chi(p) = -1 \quad \text{und } \nu \text{ gerade.} \end{cases}$$

Es ist $F(p^\nu) \ge 0$ und $F(p^\nu) \ge 1$ für $2|\nu$. Also gilt

$$F(n) \ge 0 \quad \text{und} \quad F(m^2) \ge 1. \tag{1}$$

Wir setzen

$$G(x) = \sum_{n \le x} F(n) n^{-1/2}.$$

Aus (1) folgt

$$G(x) \ge \sum_{m \le x^{1/2}} F(m^2) m^{-1} \ge \sum_{m \le x^{1/2}} m^{-1} > \frac{1}{2 \log x}. \tag{2}$$

Andererseits ist

$$G(x) = \sum_{n \le x} n^{-1/2} \sum_{d|n} \chi(d) = \sum_{d \le x^{1/2}} \chi(d) d^{-1/2} \sum_{d' \le \frac{x}{d}} d'^{-1/2} + \sum_{d' \le x^{1/2}} d'^{-1/2} \sum_{x^{1/2} < d \le \frac{x}{d'}} \chi(d) d^{-1/2}. \tag{3}$$

Nach der Eulerschen Summenformel ist für $\sigma > 0$ dann

$$\sum_{n \le y} n^{-\sigma} = \int_1^y u^{-\sigma}\, du - \sigma \cdot \int_1^y P_0(u) u^{-\sigma-1}\, du - y^{-\sigma} P_0(y) + P_0(1).$$

Wegen

$$\int_1^y P_0(u) u^{-\sigma-1}\, du = \int_1^\infty P_0(u) u^{-\sigma-1}\, du + O_\sigma(y^{-\sigma})$$

folgt mit einer passenden Konstanten $C = C(\sigma)$

$$\sum_{n \le y} n^{-\sigma} = (1-\sigma)^{-1} y^{-\sigma+1} + C(\sigma) + O_\sigma(y^{-\sigma}). \tag{4}$$

Aus Satz 4.2.5 sowie (3) und (4) folgt

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{d \le x^{1/2}} \chi(d) d^{-1/2} \cdot \left(2 \left(\frac{x}{d} \right)^{1/2} + C\left(\frac{1}{2} \right) + O\left(\left(\frac{x}{d} \right)^{1/2} \right) \right) + \sum_{d' \le x^{1/2}} \left(d'^{-1/2} \cdot O(x^{-1/4}) \right) \\ &= \left(2L(1, \chi) + O(x^{-1/4}) \right) \cdot x^{1/2} + C\left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left(L\left(\frac{1}{2}, \chi \right) + O(x^{-1/4}) \right) + O(1). \end{aligned}$$

Man sieht, daß die Annahme $L(1, \chi) = 0$ zu $G(x) = O(1)$ führt, ein Widerspruch zu (2). □

Satz 4.2.7. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ und $ggT(l,q)=1$. Dann gilt*

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \left((\sigma - 1) \cdot \left(\sum_{n \equiv l \bmod q} \Lambda(n) n^{-\sigma} \right) \right) = \frac{1}{\varphi(q)}.$$

Insbesondere enthält die arithmetische Progression $l \bmod q$ unendliche viele Primzahlen.

Beweis. Die Sätze 4.2.4 und 4.2.6 implizieren $z(q) = 0$ in Satz 4.2.3, woraus die Behauptung folgt. □

4.3 Dynamische Systeme und Diophantische Approximation

Unter dem Problem der Diophantischen Approximation versteht man die Aufgabe, zu einer gegebenen reellen Zahl α rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ zu finden, so daß die Differenz $|\alpha - \frac{p}{q}|$ klein ist (siehe dazu auch Abschnitt 3.4) .

Definition 4.3.1. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $||\alpha||$ den Abstand von α zur nächsten ganzen Zahl. Wir nennen eine Zahl α, für die

$$||a\alpha|| \leq q^{1-c}$$

für unendlich viele natürliche Zahlen q gilt, c- gut approximierbar.

Bemerkung 4.3.1. Aus Satz 3.4.1 folgt, daß jede reelle Zahl 2- gut approximierbar ist.

Wir betrachten nun die Mengen $F_c = \{\alpha \in [0,1] \colon \alpha \text{ ist } c\text{- gut approximierbar}\}$:

Satz 4.3.1. *Für die Hausdorffdimension von F_c gilt $H(F_c) \leq \frac{2}{c}$.*

Beweis. Für jedes q bezeichne G_q die Menge der $\alpha \in [0,1]$, die

$$||q\alpha|| \leq q^{1-c} \tag{1}$$

erfüllen. Es sei $\frac{a(\alpha)}{q}$ die zu α nächstgelegene Zahl von der Form $\frac{a}{q}$ mit $0 \leq a \leq q$ und $a \in \mathbb{Z}$. Dann ist $a(\alpha)$ die zu $q\alpha$ nächstgelegene ganze Zahl. Wegen (1) ist

$$|a(\alpha) - q\alpha| \leq q^{1-c}$$

und somit

$$\left| \alpha - \frac{a(\alpha)}{q} \right| \leq q^{-c}.$$

Somit besteht also G_q aus $(q-1)$ Intervallen

$$I(a,q) = \left[\frac{a}{q} - q^{-c}, \frac{a}{q} + q^{-c} \right]$$

mit $1 \leq a \leq q-1$ der Länge $2q^{-c}$ und den beiden "Endintervallen" $I(0,q) = [0, q^{-c}]$ sowie andererseits $I(q,q) = [1 - q^{-c}, 1]$ der Länge q^{-c}. Es ist klar, daß

$$F_c \subseteq \bigcup_{q=k}^{\infty} G_q$$

für jedes k gilt. Die $I(a,q)$ mit $q \geq k$ und $0 \leq a \leq q$ bilden also eine δ_k- Überdeckung von F_c, wobei $\delta_k = 2k^{-c}$ gilt. Damit ist für $s > 0$

$$\begin{aligned} H^s_{\delta_k}(F_c) &= \inf_{\{U_i\}\ \delta_k-\text{ Überdeckung von } F_c} \sum |U_i|^{-s} \leq \sum_{q \geq k} \sum_{a=0}^{q} |I(a,q)|^s \leq \sum_{q\geq k} (q+1) \cdot (2q^{-c})^s \\ &\leq 2^{1-s} \cdot \sum_{q \geq k} q^{1-cs} \leq 2^{1-s} \cdot \int_k^\infty u^{1-cs}\, du = \frac{2^{1-s}}{2-cs} - k^{2-cs}. \end{aligned}$$

Falls $1 - cs < -1$ ist, konvergieren die unendlichen Reihen und das uneigentliche Integral. Damit ist dann $H^s(F_c) = \inf H^s_\delta(F_c) < \infty$ für $s > \frac{2}{c}$, woraus $\dim_H(F_c) \leq \frac{2}{c}$ folgt. □

Bemerkung 4.3.2. Jarnik hat bewiesen, daß in der Tat $\dim_H(F_c) = \frac{2}{c}$ gilt.

Fragen über Diophantische Approximationen spielen auch in gewissen Problemen, die die Stabilität von dynamischen Systemen betreffen, eine Rolle.
Wir geben dafür ein Beispiel:

Beispiel 4.3.1. Es sei $\tilde{C}$ die Oberfläche eines unendlichen Zylinders:

$$\tilde{C} = \{\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta), z \colon 0 \leq \theta < 1\}.$$

Mittels der Abbildung $\Phi \colon \tilde{C} \to C$, $p \to (\theta, z)$ kann $\tilde{C}$ mit der "Kante" $C = \{(\theta, z) \colon 0 \leq \theta < 1, z \in \mathbb{R}\}$ identifiziert werden.
Das dynamische System $f_1 \colon C \to C$, das mittels der Abbildung Φ auch als dynamisches System auf $\tilde{C}$ aufgefaßt werden kann, sei durch

$$f_1(\theta, z) = (\{\theta + \omega\}, z) \tag{1}$$

mit festen $\omega \in (0,1)$ definiert. Es ist klar, daß die Kreise $z =$ konstant (in $\tilde{C}$) unter f_1 invariant sind. Ganz $\tilde{C}$ wird also durch invariante Kreise überdeckt.
Wir stellen die Frage: Ist das auch noch richtig, wenn das System (1) leicht gestört wird?
Wor ersetzen die Transformation (1) durch

$$f_2(\theta, z) := (\{\theta + \omega\}, z + g(\theta)), \tag{2}$$

wobei $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^∞- Funktion mit Periode 1 und $g(0) = g(1)$ ist.
Die Existenz invarianter Kurven des Systems (2) hängt von den Diophantioschen Approximationseigenschaften des Systems (2) ab. Eine Verallgemeinerung der Überlegungen von Satz 4.3.1 zeigt, daß g eine Fourierentwicklung

$$g(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e(k\theta)$$

besitzt, so daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Konstante $c = c(m)$ mit

$$|a_k| \leq c(m)|k|^{-m} \tag{3}$$

existiert. Es sei nun $\kappa \colon \theta \to z(\theta)$ eine invariante Kurve des Systems (2) mit der Fourierentwicklung

$$z(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e(k\theta).$$

Wegen der Invarianz von κ muß nun $z(\theta+\omega) = z(\theta) + g(\theta)$ gelten. Dies ergibt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e(k(\theta+\omega)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e(k\theta) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e(k\theta).$$

Aus der Eindeutigkeit der Fourierentwicklung ergibt sich nun

$$b_k = \frac{a_k}{e(k\omega) - 1}$$

mit $k \neq 0$ und b_0 beliebig. Die invarianten Kurven des Systems (2) sind also durch

$$z(\theta) = b_0 + \sum_{k\neq 0} \frac{a_k}{e(k\omega)-1} e(k\theta) \tag{4}$$

gegeben, vorausgesetzt, daß die Partialsummen

$$\sum_{k\leq K} \frac{a_k}{e(k\omega)-1} e(k\theta)$$

konvergieren. Dies ist der Fall, wenn es ein $c \geq 2$ gibt, so daß ω <u>nicht c- gut</u> approximierbar ist. Es gibt dann ein $c_0 = c_0(\omega)$, so daß

$$||k\omega|| \geq c_0 k^{1-c}$$

für alle $k \geq 1$ gilt. Wegen $|e(k\omega) - 1| \geq ||k\omega||$ und (3) folgt dann

$$\left| \frac{a_k}{e(k\omega)-1} \right| \leq c_1 k^{c-1-m}.$$

Somit konvergiert die Reihe (4) absolut und gleichmäßig, falls $m > c$ erfüllt ist.