Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Weyhmüller

Sommer 2011
12.04.2011
Blatt 1

Angewandte Statistik für Biometrie

(Abgabe: Di., 19.04.2011, vor den Übungen)

1. Lade den Datensatz `data1.dat` von der Veranstaltungshomepage herunter. Er enthält Werte $Y_1, \ldots, Y_n$ eines linearen Modells der Form $X_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i + \beta_3 \sin(Y_i) + \varepsilon_i$ (bzw. $X = A\beta + \varepsilon$). Verwende für die folgenden Teilaufgaben die Statistik-Software R und initialisiere den Zufallszahlengenerator mit `set.seed(23514)` um die Ergebnisse reproduzierbar zu machen.

   (a) Lies den Datensatz ein.

   (b) Erzeuge die Designmatrix A des linearen Modells.

   (c) Erzeuge $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)^\top \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 I_n)$ mit $\sigma = 0.05$.

   (d) Erzeuge $X = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ mit A und ε aus den vorherigen Teilaufgaben, sowie mit $\beta = (0.4, 0.1, -0.5)^\top$.

   (e) Erstelle einen Plot, der die Punkte (Y_i, X_i), sowie die Kurve $f(y) = 0.4 + 0.1y - 0.5\sin(y)$ enthält.

   (f) Bestimme die Anzahl der X_i, die größer als das arithmetische Mittel von $X_1, \ldots, X_n$ sind.

(7 Punkte)

2. Sofern es sich bei den folgenden Modellen um lineare Modelle der Form $X = A\beta + \varepsilon$ handelt, gib die Designmatrix an. Begründe andernfalls warum es sich nicht um ein lineares Modell handelt.

   (a) $X_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i^2 + \beta_3 \exp(3Y_i) + Y_i\beta_2 + \varepsilon_i$

   (b) $X_i = \beta_1 Y_i + \beta_2 \exp(\beta_3 Y_i) + \beta_3\sqrt{Y_i} + \beta_2 + \varepsilon_i$

(3 Punkte)

(3.) Für den Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)^\top$ gelte $X \sim \mathrm{N}(0, K)$ mit $K = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.
Zeige dass die Zufallsvariablen $Y_1 := X_1 - X_2$ und $Y_2 := X_1 + X_2$ unabhängig sind und dass gilt $Y_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$, sowie $Y_2 \sim \mathrm{N}(0,3)$.

Hinweis: Es gilt $Z \sim \mathrm{N}(\mu, \Sigma) \Leftrightarrow \varphi_Z(t) = \exp(\mu^\top t - \frac{1}{2} t^\top \Sigma t)$. Dabei bezeichnet $\varphi_Z(t) := \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{it^\top Z}\big)$ die charakteristische Funktion des Zufallsvektors Z.

(4 Bonuspunkte)

http://www.uni-ulm.de/mawi/zawa/lehre/sommer2011/asb2011.html