Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Weyhmüller

Sommer 2011
26.04.2011
Blatt 3

Angewandte Statistik für Biometrie

(Abgabe: Di., 03.05.2011, vor den Übungen)

1. (a) Erzeuge 1000 Realisierungen einer Zufallsvariable $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ und berechne jeweils $X_1 := Z^2$. Berechne das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz.
   (b) Erzeuge 1000 Realisierungen einer Zufallsvariable $Z \sim \mathrm{N}(0, I_5)$ und berechne jeweils $X_2 := Z^\top Z$. Berechne das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz.
   (c) Erstelle für die Teilaufgaben (1a) und (1b) jeweils ein Histogramm der berechneten X_1 bzw. X_2. Die Histogramme sollen jeweils 10 Balken enthalten deren Höhe der relativen Häufigkeit entspricht (die Gesamtfläche der Balken sollte also 1 sein). Füge dem Histogramm von X_1 die Dichte einer χ_1^2-Verteilung, dem Histogramm von X_2 die Dichte einer χ_5^2-Verteilung hinzu.

   Passen die Resultate zu den Ergebnissen aus der Vorlesung?
   Die Befehle `rnorm()`, `pchisq()`, `hist()` und `lines()` könnten hilfreich sein.

   (4 Punkte)

2. (a) Die Zufallsvariablen $X \sim F_X$ und $Y \sim F_Y$ seien unabhängig. Zeige dass

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$$

   gilt, wobei $Z := X + Y$ und $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ die charakteristische Funktion von X ist (analog für Y und Z).
   (b) Verwende (2a) um zu zeigen dass $(X + Y) \sim \chi^2_{n+m}$ gilt, falls $X \sim \chi^2_n$ und $Y \sim \chi^2_m$ unabhängig sind. Berechne ausserdem $\mathbb{E}(X)$, sowie $\mathrm{Var}(X)$

   Hinweis: Die charakteristische Funktion der χ^2_n Verteilung ist durch $\varphi(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$ gegeben. Ausserdem gilt $\mathbb{E}(X^k) = i^{-k}\varphi_X^{(k)}(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

   (4 Punkte)

3. (a) Sei $X \sim \mathrm{N}(\mu, K)$ n-dimensional normalverteilt mit positiv definiter Kovarianzmatrix $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bestimme eine lineare Transformation $X \mapsto \widetilde{X}$, so dass gilt $\widetilde{X} \sim \mathrm{N}(0, I_n)$.
   (b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Gib einen Algorithmus zur Berechnung einer verallgemeinerten Inversen A^- von A an.
   Hinweis: Durch Multiplikation mit Permutationsmatrizen P_l von links und P_r von rechts kann jede Matrix A auf die Form wie in Aufgabe 2 von Blatt 2 gebracht werden.

   (4 Punkte)