Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Weyhmüller

Sommer 2011
10.05.2011
Blatt 5

# Angewandte Statistik für Biometrie

(Abgabe: Di., 17.05.2011, vor den Übungen)

1. In einer klinischen Studie erhalten 20 Personen ein Medikament. Anschließend wird stündlich ihre Körpertemperatur $X_i$ gemessen, jeweils einhundertmal. Es liegen also Messwerte zu den Zeitpunkten $t_1 = 1, \ldots, t_{100} = 100$ vor. Man geht davon aus, dass bei jeder Person ein lineares Modell der Form $X_i = \beta_1 + \beta_2 t_i + \varepsilon_i$ vorliegt. Es soll getestet werden ob das Medikament die Körpertemperatur ändert, die Nullhypothese ist dass keine Änderung auftritt (also $\beta_2 = 0$). Der Test soll zum Niveau $\alpha = 5\%$ durchgeführt werden.

   (a) Lade den Datensatz `fieber.dat` von der Homepage. Die Messwerte zum Zeitpunkt $t_i$ befinden sich in der $i$-ten Zeile, die Werte der Person $j$ in der $j$-ten Spalte. Schätze für jeden der 20 Teilnehmer die Parameter $\beta_1$ und $\beta_2$ und teste $H_0 : \beta_2 = 0$ (gegen $H_1 : \beta_2 \neq 0$) mit der Testgröße $\frac{Q_{R|H_0} - Q_R}{Q_R} \frac{n-r}{q}$ aus der Vorlesung und dem 5%-Quantil der entsprechenden $F(q, n-r)$-Verteilung. Wie ist das Ergebnis des Tests? Kommt R bei `summary(lm())` zum selben Ergebnis?

   (b) Initialisiere den Zufallszahlengenerator mit `set.seed(23512)` und simuliere für 20 Personen jeweils 100 Messwerte $X_i$ unter $H_0$, also $X_i = \beta_1 + \varepsilon_i$. Bei allen Personen soll $\beta_1 = 36.8$ und $\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ mit $\sigma = 0.7$ gelten. Führe Tests wie in (a) durch. Unterscheiden sich die Ergebnisse und falls ja, wie?

   *Hinweis:* Den Schätzer $\hat{\sigma} := \sqrt{\frac{1}{n-r}} \|X - A\hat{\beta}\|$ für die Standardabweichung im linearen Modell erhält man in R mit `summary(lm())$sigma`.

   (4+2 Punkte)

2. Es sei $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\mu := \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$ und $\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$ invertierbar.

   Zeige dass in diesem Fall $F_{X|Y=y}$, also die Verteilung von $X$ gegeben $Y = y$, durch die (eindimensionale) Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu_x + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y), (1-\rho^2)\sigma_X^2)$ gegeben ist.

   *Hinweis:* Für die bedingte Dichte $f_{X|Y=y}$ gilt $f_{X|Y=y}(x, y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$.

   (6 Punkte)