Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Weyhmüller

Sommer 2011
17.05.2011
Blatt 6

Angewandte Statistik für Biometrie

(Abgabe: Di., 24.05.2011, vor den Übungen)

1. Lies den Datensatz `data6.dat` von der Homepage ein. Die erste Spalte enthält Messwerte X_i, die zweite die Zeitpunkte der Messungen t_i. Passe die folgenden drei Modelle an den Datensatz an:

   - $X_i = \beta_1 + \beta_2 t_i + \varepsilon_i$
   - $X_i = \beta_1 + \beta_2 t_i^2 + \varepsilon_i$
   - $X_i = \beta_1 + \beta_2 (t_i - \bar{t}) + \varepsilon_i$

   Erstelle für jedes Modell einen Plot, der die Punkte (x_i, t_i), die Regressionskurve sowie die Kurve der Funktion $t \mapsto 3{+}0.5t^2$ enthält. Erstelle jeweils mit `predict()` 95%-Konfidenzintervalle und füge diese mit `matlines()` dem jeweiligen Plot hinzu. Verwende bei `predict()` je einmal die Option `interval="conf"` und `interval="pred"`. Worin besteht der Unterschied?

   (4 Punkte)

2. (a) Gegeben sei das lineare Modell $X_i = \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 t_i + \varepsilon_i$. In der Vorlesung wurde vorgeschlagen stattdessen das Modell $X_i = \beta_1 + \beta_2(t_i - \bar{t}) + \varepsilon_i$ zu betrachten (da dann $A^\top A$ eine Diagonalmatrix ist).

   Zeige dass ein eindeutiger Zusammenhang zwischen $(\beta_1, \beta_2)^\top$ und $(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)^\top$ besteht, dass es also eine bijektive Abbildung f gibt mit $f(\beta_1, \beta_2) = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)^\top$.

   (b) Wie muss das Modell $X_i = \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 t_i^2 + \varepsilon_i$ umgeformt werden damit $A^\top A$ eine Diagonalmatrix ist? Gib das neue Modell sowie die Matrix $A^\top A$ an.

   (c) Finde einen (gemeinsamen) Konfidenzbereich für $(\beta_1, \beta_2)^\top$ aus 2(a). Welche Form hat er?

   Erinnerung: Gilt $Y \sim \mathrm{N}(0, C)$ mit $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und vollem Rang, dann gilt $Y^\top B Y \sim \chi_r^2$ genau dann wenn $\mathrm{rang}(B) = r$ und BC idempotent ist.

   (2+2+4 Punkte)