Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Weyhmüller

Sommer 2011
24.05.2011
Blatt 7

Angewandte Statistik für Biometrie

(Abgabe: Di., 31.05.2011, vor den Übungen)

1. Es werden zwei Limonaden mit Mangogeschmack auf den Markt gebracht. Die Rezepturen sind identisch, allerdings wird die erste nicht beworben, die zweite dagegen schon. Die Datensätze `mango1.dat` und `mango2.dat` auf der Homepage enthalten jeweils in der zweiten Spalte die Tage nach Markteinführung t_i (bzw. τ_i) und in der ersten Spalte die dazu passenden Verkaufszahlen X_i (bzw. Z_i) in Hektoliter.

   (a) Passe an den ersten Datensatz das Modell $X_i = \beta_1 + \beta_2 t_i + \varepsilon_i$ und an den zweiten das Modell $Z_i = \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 \tau_i + \varepsilon_i$ an. Teste die Hypothese dass die Werbung die Verkaufszahlen nicht beeinflusst, also $\mathrm{H}_0 : \beta = \tilde{\beta}$, zum Niveau $\alpha = 5\%$. Verwende die $\mathrm{F}_{2,n-4}$-verteilte Teststatistik aus der Vorlesung. Wie lautet die Testentscheidung?

   (b) Wie kann man vorgehen um zwei Modelle der Form $X_i = \beta_1 + \beta_2 t_i + \beta_3 t_i^2 + \varepsilon_i$ auf Gleichheit zu testen? Wenn man den Trick anwendet, bei dem die beiden Modelle zu einem Modell zusammengefasst werden, wie ist dann die Teststatistik aus der Vorlesung verteilt?

(5+2 Punkte)

2. Betrachte ein Modell mit Mehrfachmessungen der Form

$$X_{i,j} = m_0(t_i, \beta) + \varepsilon_{i,j} \qquad 1 \le j \le m_i, \quad 1 \le i \le n$$

wobei $m_0(t, \beta) := \sum_{k=1}^{p} f_k(t)\beta_k$ gilt und $f_1, \dots, f_p$ (beliebige) Funktionen sind. Wie in der Vorlesung sei $\overline{X}_{i\bullet} := \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i} X_{i,j}$. Zeige dass

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\big(\overline{X}_{i\bullet} - m_0(t_i,\beta)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i\big(\overline{X}_{i\bullet} - m_0(t_i,\hat{\beta})\big)^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i\big(m_0(t_i,\hat{\beta}) - m_0(t_i,\beta)\big)^2$$

gilt.

Hinweis: Wie üblich minimiert $\hat{\beta}$ die Summe der quadrierten Differenzen zwischen $m_0(t_i, \beta)$ und den Messungen $X_{i,j}$. Demnach verschwinden alle $\frac{\partial}{\partial \beta_k}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\big(X_{i,j} - m_0(t_i,\beta)\big)^2\Big)$ im Punkt $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)^\top$.

(5 Punkte)