Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Weyhmüller

Sommer 2011
21.06.2011
Blatt 11

Angewandte Statistik für Biometrie

(Abgabe: Di., 28.06.2011, vor den Übungen)

1. Betrachte den Datensatz `mensa2.dat`, er enthält die Daten von Blatt 10, allerdings für jede Ausprägung gleichviele Realisierungen ($m = 12$). Führe einen Tukey-Test und einen Scheffé-Test durch, einmal mit den Testgrößen und Quantilen aus der Vorlesung, einmal mit den bereits in R implementierten Funktionen. Berechne beim Tukey-Test auch die p-Werte. Unterscheiden sich die Ergebnisse untereinander, sowie von den Ergebnissen der Aufgabe 1(b) von Blatt 10?

   Hinweis: Die Funktionen `TukeyHSD()`, `ptukey()` und `scheffe.test()` aus dem Paket `agricolae` (sowie ihre Dokumentationen) könnten hilfreich sein.

   (6 Punkte)

2. Wir betrachten das Modell der einfaktoriellen Varianzanalyse, also $X = A\beta + \varepsilon$ mit $\beta = (\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)^\top$, sowie A und $(A^\top A)^-$ wie in der Vorlesung, also

$$(A^\top A)^- = \operatorname{diag}(0, n_1^{-1}, \ldots, n_k^{-1}).$$

   Wie üblich ist die Nullhypothese $\mathrm{H}_0 : \alpha_1 = \ldots = \alpha_k$ bzw. (mit einer passenden Matrix G) $G\beta = 0$.

   (a) Es gilt $G\hat{\beta} \sim \mathrm{N}(G\beta, \sigma_\varepsilon^2 C)$, wobei $C = G(A^\top A)^- G^\top$. Zeige dass C vollen Rang hat und lediglich die Einträge auf der Diagonalen, sowie die auf den ersten beiden Nebendiagonalen von Null verschieden sind.

   (b) Beim Scheffé-Test wird H_0 verworfen falls es ein $w \in \operatorname{Bild}(G^\top)$ gibt mit

$$|w^\top \hat{\beta}| > \sqrt{w^\top (A^\top A)^- w (k-1) \hat{\sigma}_\varepsilon^2 c(\alpha)}, \qquad (*)$$

   wobei $c(\alpha)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der $\mathrm{F}_{k-1,n-k}$-Verteilung ist. Zeige dass damit insbesondere die Hypothesen $\mathrm{H}_{0,\mathrm{i},\mathrm{j}} : \alpha_i = \alpha_j$ getestet werden, dass es also ein $w^* \in \operatorname{Bild}(G^\top)$ gibt, so dass $(*)$ die Form

$$|\overline{X}_{i\bullet} - \overline{X}_{j\bullet}| > \sqrt{(n_i^{-1} + n_j^{-1})(k-1)\hat{\sigma}_\varepsilon^2 c(\alpha)}$$

   wie in der Vorlesung angegeben hat. Zeige ausserdem dass die Hypothese $\mathrm{H}_{0,\mathrm{i}} : \alpha_i = 0$ damit nicht getestet wird.

   (2+4 Punkte)