UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Angewandten Diskreten Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 48 Punkte

Übungsblatt 2

Abgabe: Freitag, 5. November 2010, vor den Übungen

1. Entscheide die Lösbarkeit der folgenden Diophantischen Gleichungen. Gib im Falle der Lösbarkeit eine Lösung an:

   (a) $143x - 187y + 221z = 2$

   (b) $28x + 91y - 35z = 6$. (10 Punkte)

2. Es sei $a, b \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Zeige:

   (a) Aus $p|ab$ folgt $p|a \vee p|b$.

   (b) Es existiere ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a|b^k$. Dann folgt aus $p|a$ die Aussage $p|b$. (5 Punkte)

3. (a) Es seien $p_1, \dots, p_n$ verschiedene Primzahlen. Zeige, daß dann $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ durch eine Primzahl p teilbar ist, die nicht in $\{p_1, \dots, p_n\}$ vorkommt.

   (b) Zeige damit, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. (6 Punkte)

4. (a) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Finde eine Faktorisierung von $a^n - b^n$, in der einer der Faktoren $a - b$ ist.

   (b) Zeige: Ist $2^m + 1$ für $m \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, dann ist m von der Form $m = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}$.

   (c) Wiederum sei $k \in \mathbb{N}$. Die k- te <u>Fermatzahl</u> F_k ist durch $F_k := 2^{2^k} + 1$ definiert.
   Zeige: $F_k - 2 = F_0 \cdots F_{k-1}$

   (d) Zeige:

      i. Für $k < l$ gilt: $F_k|(F_l - 2)$.

      ii. $ggT(F_k, F_l) = 1$.

   (e) Folgere aus dem Ergebnis von d), daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

   (f) Auf Carl- Friedrich Gauß geht folgender Satz zurück:
   Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist ein regelmäßiges n- Eck genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar,

wenn n von der Form $n = 2^\alpha \cdot \prod_k F_k$ mit paarweise verschiedenen Fermatschen Primzahlen F_k mit $\alpha, k \in \mathbb{N}_0$ ist.

Für welche $n \in \mathbb{N}$ mit $3 \leq n \leq 30$ ist das regelmäßige n- Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar?

(15 Punkte)

5. (a) Unter der Teilersumme σ einer natürlichen Zahl n versteht man die Summe all seiner Teiler.

   i. Was ist $\sigma(p)$ mit einer Primzahl p?

   ii. Zeige: $\sigma(p^\alpha) = \dfrac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$ mit $\alpha \in \mathbb{N}$.

   iii. Zeige: $\sigma(p \cdot q) = \sigma(p) \cdot \sigma(q)$ mit Primzahlen p und q.

   (b) Eine Primzahl q von der Form $q = 2^m - 1$ heißt Mersennesche Primzahl.
   Zeige: Wenn $q = 2^m - 1$ ist eine Primzahl ist, ist bereits m eine Primzahl.

   (c) Eine natürliche Zahl m heißt vollkommen, wenn m die Summe seiner "echten" Teiler ist, also ohne die Zahl m selbst.
   Zeige: Ist m von der Form $m = 2^{p-1}(2^p - 1)$, wobei $q = 2^p - 1$ eine Mersennesche Primzahl ist, so ist m vollkommen.

   (d) i. Keine Primzahl ist vollkommen.

   ii. Ist p eine Primzahl, so kann p^α mit $\alpha \in \mathbb{N}$ keine vollkommene Zahl sein.

   (e) i. Wenn p und q verschiedene Primzahlen mit $p, q > 2$ sind, ist $n = p^\alpha \cdot q^\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ nicht vollkommen.

   ii. Ist diese Aussage immer noch richtig, wenn man die Bedingung $p, q > 2$ wegläßt?

(12 Punkte)