UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Angewandten Diskreten Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 48 Punkte

Übungsblatt 3

Abgabe: Freitag, 19. November 2010, vor den Übungen

1. Erstelle Verknüpfungstafeln für die Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, der Menge der Restklassen für

   (a) $n = 5$ bzw.

   (b) $n = 6$. (4 Punkte)

2. In welcher der folgenden Kongruenzen darf der gemeinsame Faktor 3 gekürzt werden (mit Begründung)?

   (a) $3 \cdot 5 \equiv 3 \cdot 26 \mod 9$

   (b) $3 \cdot 11 \equiv 3 \cdot 34 \mod 23$ (2 Punkte)

3. (a) Bestimme die multiplikativen Inversen von

      i. $5 \mod 17$

      ii. $46 \mod 97$.

   (b) Bestimme das multiplikative Inverse von $27 \mod 1280$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Die Rechenschritte sind zu zeigen. (5 Punkte)

4. (a) Welchen Rest läßt 13^{276} bei Division durch 12?

   (b) Bestimme die letzten beiden Ziffern von 2^{1000} sowie die letzte Ziffer von 7^{359}.

   (c) Pierre de Fermats Vermutung, daß alle Fermatzahlen $F_k := 2^{2^k} + 1$ prim seien, wurde 1732 von Leonhard Euler mit dem Beispiel der zusammengesetzten Zahl $F_5 = 2^{32} + 1$ widerlegt.
   Folgere aus den beiden Gleichungen

   $$641 = 5 \cdot 2^7 + 1 \quad \text{und} \quad 641 = 5^4 + 2^4$$

   die Gültigkeit von

   $$641 | \, (2^{32} + 1).$$

   (7 Punkte)

5. Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$. Zeige:
   (a) Mindestens eine der Zahlen ist durch drei teilbar.
   (b) 4 teilt $a \cdot b$
   (c) 60 teilt $a \cdot b \cdot c$ (6 Punkte)

6. Es sei $g > 1$ eine natürliche Zahl. Man kann zeigen, daß jedes $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Darstellung der Form
$$n = \sum_{k=0}^{m} a_k g^k, \quad a_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}, \quad a_m \neq 0$$
hat.
   (a) Formuliere und beweise eine Regel für die Teilbarkeit von n durch $g + 1$, die die g- adische Darstellung von n benutzt.
   (b) Eine Zahl liegt in ihrer 13- adischen Darstellung vor und lautet $(1232)_{13}$. Überprüfe die Teilbarkeit durch 2,3,5 und 7. (6 Punkte)

7. Bestimme alle vierstelligen Quadratzahlen, bei denen die ersten beiden und die letzten beiden Ziffern gleich sind. (4 Punkte)

8. Eine Folge sei rekursiv über $u_1 = u_2 = 1$ und $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ für $n > 2$ definiert (Fibonacci- Zahlen). Zeige:
   (a) $\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = u_n u_{n+1}$
   (b) $u_{n+m} = u_{n-1} u_m + u_n u_{m+1}$
   (c) u_{2n} ist durch u_n teilbar.
   (d) $u_n^2 = u_{n-1} u_{n+1} + (-1)^{n+1}$
   (e) Ist n durch m teilbar, so ist auch u_n durch u_m teilbar.
   (f) Zwei benachbarte Fibonacci- Zahlen sind teilerfremd.
   (g) Es gilt die Gleichung $ggT(u_m, u_n) = u_{ggT(n,m)}$.
   (h) Es gilt auch die Umkehrung der Aussage in e).
   (i) Es gibt keine ungerade Fibonacci- Zahl, die durch 17 teilbar ist.

   Hinweis:
   Folgende Aussagen über den größten gemeinsamen Teiler dürfen ohne Beweis verwendet werden:
   - Aus $b|c$ folgt: $ggT(a, b) = ggT(a + c, b)$.
   - Aus $ggT(a, c) = 1$ folgt $ggT(a, bc) = ggT(a, b)$.

   Der italienische Mathemetiker Leonardo da Pisa, uns besser bekannt als Fibonacci (ursprünglich filius Bonaccii, lat. Sohn des Bonacci), verfaßte 1202 das Werk "Liber abaci", das uns in einer Abschrift aus dem Jahr 1228 erhalten geblieben ist. Darin betrachtete er folgende Aufgabe:
   Wieveiel Kaninchenpaare werden in einem Jahr von einem Paar erzeugt?

   (14 Punkte)