UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Angewandten Diskreten Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 48 Punkte

Übungsblatt 4

Abgabe: Freitag, 3. Dezember 2010, vor den Übungen

1. Besitzt $27^{(27^{27})}$ dieselbe Einerziffer wie $\left(27^{27}\right)^{27}$? (4 Punkte)

2. Eine Bande von 17 Räubern stahl einen Sack mit Goldstücken. Als sie ihre Beute in gleiche Teile teilen wollten, blieben drei Goldstücke übrig. Beim Streit darüber, wer ein Goldstück mehr erhalten sollte, wurde ein Räuber erschlagen. Jetzt blieben bei der Verteilung zehn Goldstücke übrig. Erneut kam es zu Streit und wieder verlor ein Räuber sein Leben. Jetzt endlich ließ sich die Beute gleichmäßig verteilen.

   Wie viele Goldstücke waren mindestens im Sack? (6 Punkte)

3. Bestimme eine ganze Zahl, die bei Division durch 2,3,6 bzw. 12 die Reste 1,2,5 bzw. 5 läßt. (5 Punkte)

4. (a) Berechne $\varphi(359)$, $\varphi(360)$ und $\varphi(361)$.

   (b) Zeige, daß aus $d|n$ auch $\varphi(d)|\varphi(n)$ folgt. (6 Punkte)

5. Es sei $a, x \in \mathbb{N}$.

   (a) Aus $a|(x^2 + 1)$ folgt die Kongruenz $x^4 \equiv 1 \bmod a$.

   (b) Ist zudem $a > 2$, dann gilt auch $x^2 \not\equiv 1 \bmod a$. (4 Punkte)

6. Ein Halsband besteht aus n kreisförmig angeordneten Steinen. Jeder Stein soll mit einer von a möglichen Farben gefärbt werden, wobei jede Farbe beliebig oft verwendet werden darf. Zwei Färbungen gelten als identisch, wenn jeder Stein in beiden dieselbe Farbe enthält, und sie gelten als äquivalent, wenn sie durch Drehung auseinander vorgehen.

   (a) Es sei $n = 6$. Gib ein Beispiel einer Klasse mit genau drei äquivalenten (nicht identischen) Färbungen an.

   (b) Zeige: Ist $n = p$ eine Primzahl, so sind zwei Färbungen genau dann äquivalent, wenn sie identisch sind. Die Färbungen, bei denen mindestens zwei verschiedene Farben verwendet werden, zerfallen in Klassen von p äquivalenten, nicht identischen Färbungen.

   (c) Folgere aus b) den kleinen Satz von Fermat. (8 Punkte)

7. Ein "Ewiger Kalender" ist eine Formel, nach der man aus dem Datum bezüglich des Gregorianischen Kalenders den Wochentag bestimmen kann. Zuerst einigen wir uns darauf, das Jahr am 1. März beginnen zu lassen, ein eventueller Schalttag befindet sich also gegen Ende des Jahres.
Die Gregorianische Kalenderreform fand 1582 statt. Es wurde festgesetzt, daß das Jahr 1600 ein Schaltjahr ist. Danach sollte jedes vierte Jahr ein Schaltjahr sein, in jedem 100. Jahr sollte der Schalttag ausfallen (die Jahre 1700, 1800, 1900), in jedem 400. Jahr sollte es aber wiederum einen Schalttag geben, so daß das Jahr 2000 ein Schaltjahr war.
Wir erteilen nun dem Sonntag die Nummer 0, fortlaufend bis zum Samstag mit der Nummer 6 und nehmen an, der 1. März 1600 habe die Nummer a_0.

   (a) Zeige: Für die Nummer a_t des 1. März des Jahres $1600 + t$ gilt:
   $$a_t \equiv a_0 + t + \left[\frac{t}{4}\right] - \left[\frac{t}{100}\right] + \left[\frac{t}{400}\right] \bmod 7.$$
   (b) Bestimme a_0 anhand des 1. März 2010.
   (c) Welche Darstellung für a_t erhalten wir, wenn wir die Jahreszahl in Aufgabe a) in der Form $100c+d$ mit $0 \leq d < 100$ schreiben?

Wir führen jetzt statt a_t die Bezeichnung $(1.\text{März})_t$ ein. Entsprechend gilt etwa $(6.\text{Mai})_{2007}=(6.3.)_{2007}$ für die Nummer des Wochentages, auf den der 6. Mai 2007 gefallen ist. Dabei muß man nur beachten, daß Januar und Februar- anders als üblich- als 11. und 12. Monat zum Vorjahr zählen.
Um nun für jedes beliebige Datum den Wochentag zu bestimmen, müssen wir die unterschiedliche Länge der Monate berücksichtigen.
So gilt etwa
$$\begin{aligned}(1.\text{April})_t &\equiv (1.\text{März})_t + 3 \bmod 7 \quad \text{und}\\ (1.\text{Mai})_t &\equiv (1.\text{April})_t + 2 \bmod 7 \equiv (1.\text{März})_t + 5 \bmod 7\end{aligned}$$
Die Werte bezogen auf den $(1.\text{März})_t$ seien als $r_m - 2$ definiert.

   (d) Bestimme die Werte $r_m - 2$ für die Monate Juni bis Februar.
   (e) Fasse die bisherigen Ergebnisse zusammen und schließe daraus die Kalenderformel
   $$(n.m.)_{100c+d} = n + 5c + d + \left[\frac{13m-1}{5}\right] + \left[\frac{d}{4}\right] + \left[\frac{c}{4}\right] \bmod 7$$
   wobei n von 1 bis 31 läuft (Angabe des Tages) und m die Nummern der Monate darstellt, also $m = 1$ für den März und $m = 12$ für den Februar.
   (f) An welchen Wochentagen fanden oder finden folgende Ereignisse statt:
      i. der Thesenanschlag Martin Luthers an der Schloßkirche von Wittenberg (31. Oktober 1517)
      ii. die Schlacht von Waterloo (18. Juni 1815)
      iii. der Todestag von Carl- Friedrich Gauß (23. Februar 1855)
      iv. die Volksabstimmung über die politische Zugehörigkeit von Oberschlesien (20. März 1921)
      v. die Wahl Konrad Adenauers zum ersten Bundeskanzler der Bundesrepublik Deutschland (15. September 1949)
      vi. der Fall der Berliner Mauer (9. November 1989)
      vii. die Abgabe dieses Übungsblattes (3. Dezember 2010) (15 Punkte)