UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 10

Abgabe: Dienstag, 18. Januar 2011, vor den Übungen

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $d_k(\vec{x}, \vec{y})$ durch

$$d_n(\vec{x}, \vec{y}) = \max_{1 \le j \le n} |x_j - y_j|$$

(a) Zeige: $(\mathbb{R}^n, d_n)$ ist ein metrischer Raum.

(b) Beschreibe die geometrische Gestalt der Umgebungen $U_\delta(\vec{x_0})$ mit $\delta > 0$ für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

(c) Es sei $(\vec{a_k})_{k=1}^{\infty}$ eine Folge mit $\vec{a_k} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$\lim_{k\to\infty}{}^{(1)} \vec{a_k} = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \vec{a_k} = \vec{a} \quad \text{im metrischen Raum } (\mathbb{R}, d)$$

mit $d(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}||$ (im Sinne von Definition 7.2.3) gilt, und

$$\lim_{k\to\infty}{}^{(2)} \vec{a_k} = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \vec{a_k} = \vec{a} \quad \text{im metrischen Raum } (\mathbb{R}, d_n)$$

gilt.
Zeige:

$$\lim_{k\to\infty}{}^{(1)} \vec{a_k} = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}{}^{(2)} \vec{a_k} = \vec{a}.$$

(6 Punkte)

2. Das Paar (X, d) sei durch $X = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} |\ f \text{ stetig}\}$ mit $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)||\ x \in [0,1]\}$ gegeben. Zeige:

(a) Es ist (X, d) ein metrischer Raum.

(b) Außerdem ist (X, d) vollständig, d.h. jede Cauchyfolge konvergiert. (4 Punkte)

3. Nun seien $X = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} |\ f \text{ integrierbar über } [0,1]\}$ und $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$ gegeben. Zeige, daß (X, d) kein metrischer Raum ist. (2 Punkte)

4. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $\Delta > 0$. Der Mittelwert $M(f,\Delta)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$M(f,\Delta)(x) = (2\Delta)^{-1} \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} f(t)\,dt$$

definiert. Zeige:

(a) Es gilt $f(x) = \lim\limits_{\Delta \to 0^+} M(f,\Delta)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Der Mittelwert $M(f,\Delta)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

(c) Wenn f differenzierbar ist, so ist $f'(x) = \lim\limits_{\Delta \to 0^+} M(f',\Delta)(x)$.

(d) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Ist f genau k- mal differenzierbar, so ist $M(f,\Delta)$ dann $(k{+}1)$- mal differenzierbar.

(e) Es sei $f(x) = |x|$. Zeige: $\dfrac{d}{dx} M(f,\Delta)(0) \to \infty$ für $\Delta \to 0^+$.

(6 Punkte)

5. (a) Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Zeige: $f(x)$ ist in $x = 0$ nicht stetig.

(b) Es sei

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Zeige: $g(x)$ ist in $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.

(c) Es sei

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Zeige: $h(x)$ ist in $x = 0$ differenzierbar, $h'(x)$ ist in $x = 0$ aber nicht stetig.

(d) Es sei

$$k(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x^2} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Zeige: $k(x)$ ist in $x = 0$ differenzierbar, aber $k'(x)$ ist in $[-\delta, \delta]$ mit $\delta > 0$ unbeschränkt.

(6 Punkte)

Wir wünschen Euch allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr 2011!