UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 3

Abgabe: Dienstag, 9. November 2010, vor den Übungen

1. Die "Zackenfunktion" z sei wie folgt definiert:

   Für $x \in [0,1)$ sei $z(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1-x & \text{für} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$

   Für $x = k + u$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $0 \le u < 1$ sei $z(x) = z(u)$. Weiter sei
   $$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} \cdot z\,(100^n x) \quad \text{für alle } x \in [0,1).$$
   Dann habe $x_0 \in [0,1)$ die g- Bruchentwicklung (mit $g = 100$) derart, daß
   $$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 100^{-n} \quad \text{mit } a_n \in \{0, 1, \ldots, 99\}$$
   und $a_n \neq 99$ für unendlich viele n sei. Es sei $m \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren:
   $$x_0^{(m)} := \sum_{n=0}^{m} a_n \cdot 100^{-n}, \quad x_1^{(m)} := x_0^{(m)}, \quad x_2^{(m)} := x_0^{(m)} + \frac{1}{2} \cdot 100^{-m} \quad \text{und} \quad x_3^{(m)} := x_0^{(m)} + 100^{-m}$$
   Zeige:

   (a) Die Funktion f ist auf $[0,1)$ stetig.

   (b) Die Zackenfunktion z ist Lipschitz- stetig mit der Lipschitzkonstanten 1.

   (c) Es sei $x_0^{(m)} \le x_0 \le x_0^{(m)} + 100^{-m}$. Dann gibt es ein $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, so daß
   $$\left| z(100^m x_j^{(m)}) - z\,(100^m x_0) \right| \ge \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \left| f(x_j^{(m)}) - f(x_0) \right| \ge \frac{1}{12} \cdot 10^{-m}.$$

   (d) Es gilt
   $$\sup_{\substack{x_0^{(m)} \le x \le x_0^{(m)} + 100^{-m} \\ x \neq x_0}} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \ge \frac{1}{12} \cdot 10^m.$$

   (e) Die Funktion f ist in keinem $x_0 \in [0,1)$ differenzierbar. (9 Punkte)

2. Es sei $f_n(x) = x^n$ mit $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ und $\epsilon > 0$.

   (a) Bestimme für alle $x \in [0,1)$ das kleinste $n_0 = n_0(x,\epsilon)$, so daß $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ und zeige, daß für alle $\epsilon > 0$ dann $\lim\limits_{x\to 1^-} n_0(x,\epsilon) = \infty$ ist.

   (b) Zeige: Auf dem Intervall $[0, 1-\delta]$ mit $\delta > 0$ gilt: $f_n(x) \stackrel{glm.}{\longrightarrow} f(x)$. (2 Punkte)

3. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

   (a) $e^x > 1 + x$ für alle $x \neq 0$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

   (c) $\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot ne$

   (d) $\frac{1}{2(n+1)} \leq \left| e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right| \leq \frac{e}{n}$ (5 Punkte)

4. Untersuche die Folge $\left(\frac{n^p}{\exp\left(\log^2 n\right)}\right)_{n=1}^{\infty}$ mit $p > 0$ auf Konvergenz. (2 Punkte)

5. Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich:

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2+1} \cdot e^x$

   (b) $f(x) = x^x$

   (c) $f(x) = \log\log\log x$ (3 Punkte)

6. Berechne folgende Grenzwerte im Falle ihrer Existenz:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{\tan x}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

   (c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log x}$ (3 Punkte)