UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

# Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

## Übungsblatt 5

Abgabe: Dienstag, 23. November 2010, vor den Übungen

1. Es sei $s(x) = 1 + \sin(\pi x)$ und $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} s(100^n x)$.

   Zeige:

   (a) Die Funktion $f$ ist stetig.

   (b) Die Funktion $f_m(x) = \sum_{n=0}^{m} 10^{-n} s(100^n x)$ ist unendlich oft differenzierbar.

   (c) Konvergiert $\left(f_m'\left(\frac{1}{3}\right)\right)_{m=1}^{\infty}$? (4 Punkte)

2. Zeige: Die Eulersche Zahl $e$ ist irrational. (3 Punkte)

3. Analog zu den Arcusfunktionen lassen sich auch Umkehrfunktionen zu den Hyperbelfunktionen finden. Die Umkehrfunktion zum Sinus hyperbolicus ist der Areasinus Hyperbolicus $\operatorname{Arsinh} x$, entsprechend werden der $\operatorname{Arcosh} x$, der $\operatorname{Artanh} x$ und der $\operatorname{Arcoth} x$ definiert.

   Zeige:

   (a) $(\operatorname{Arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

   (b) $\operatorname{Arsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

   (c) $\operatorname{Artanh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ und bestimme den Konvergenzradius dieser Reihe.

   (d) Gib den Definitions- und Wertebereich, das Monotonie- und Symmetrieverhalten und den Grenzwert für $x \to \pm 1$ und $x \to \pm\infty$ des $\operatorname{Arcoth} x$ an. (4 Punkte)

4. (a) Zeige:

   $$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

   (b) Drücke damit $\pi$ als unendliche Reihe aus. (4 Punkte)

5. Es sei $T_n = n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben.
   Zeige:

   (a) Für die Größen $T_n$ gilt die Beziehung

   $$T_1 = 0,\ T_2 = 2 \quad \text{und} \quad T_{2n} = \sqrt{2n^2 - 2n\sqrt{n^2 - T_n^2}} \quad \text{für } n \geq 2.$$

   (b) Es gilt $\lim_{n\to\infty} T_n = \pi$.

   (c) Warum gilt diese Formel nicht für $n = 1$? (4 Punkte)

6. Zeige:

   (a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\dfrac{\sin x}{2^n \cdot \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$.

   (b) Es ist $\dfrac{\sin x}{x} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$.

   (c) Dies ergibt die Darstellung:

   $$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

   (5 Punkte)

Man konnte zeigen, daß auch $\pi$ irrational und transzendent ist. Trotzdem gibt es noch viele weitere erstaunliche Darstellungen für die Kreiszahl, wie die 1916 von Ramanujan entdeckte

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot (1103 + 26390 \cdot n)}{(n!)^4 \cdot 396^{4n}}.$$