UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 6

Abgabe: Dienstag, 30. November 2010, vor den Übungen

1. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. Zeige:

   (a) Im Ursprung läßt sich die Funktion mit $f(0) = 1$ stetig fortsetzen.

   (b) Mittels der Taylorentwicklung läßt sich f als $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot x^n$ mit gewissen Zahlen B_n darstellen. Zeige, daß für diese Zahlen
   $$\sum_{n=0}^{m} \binom{m+1}{n} \cdot B_n = 0 \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \quad \text{gilt.}$$

   (c) Bestimme die Zahlen $B_1, \ldots, B_7$.

   (d) Zeige:
   $$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\cosh \frac{x}{2}}{\sinh \frac{x}{2}},$$
   und damit ist die Funktion $\dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x}{2}$ gerade, d.h. $B_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (e) Es gilt
   $$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

   (10 Punkte)

2. Gib eine auf $[0, 1]$ integrierbare Funktion mit unendlich vielen Unstetigkeitsstellen an.

   (3 Punkte)

3. Eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig, wenn es eine Zerlegung $(t_0, \ldots, t_n)$ von $[a, b]$ gibt, so daß für jedes $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ die Funktion f auf dem Intervall (t_i, t_{i+1}) stetig ist, und daß
   $$\lim_{x \downarrow t_i} f(x) \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \uparrow t_i} f(x)$$
   existieren.
   Zeige, daß eine stückweise stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. (4 Punkte)

4. Es sei $\mathcal{M} = \left\{ x \in [0,1] \middle| \; \exists n(x) \colon x = \sum_{k=1}^{n(x)} a_k 10^{-k} \right\}$ mit $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und $a_{n(x)} \neq 0$.

(a) Bestimme für die folgenden Funktionen f_1, f_2 die Oberintegrale $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx$ und die Unterintegrale $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx$

i.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathcal{M}. \end{cases}$$

ii. Es sei $\lim_{n \to \infty} g_n = 0$.

$$f_2(x) = \begin{cases} g_{n(x)} & \text{für} \quad x \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathcal{M}. \end{cases}$$

(b) Für welche j existiert $\int_0^1 f_j(x)\, dx$ mit $j = 1, 2$?

(7 Punkte)