UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 9

Abgabe: Dienstag, 21. Dezember 2010, vor den Übungen

1. Die Funktion $\Gamma\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$
$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt$$
heißt die Gammafunktion.
Zeige:
$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \text{und damit} \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
(4 Punkte)

2. Zeige, daß $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^{9/2}}\, dx$ konvergiert. (4 Punkte)

3. (a) Zeige: die unendliche Reihe
$$\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n \cdot \log n \cdot (\log\log n)^\alpha}$$
ist für $\alpha \le 1$ divergent und für $\alpha > 1$ konvergent.

   (b) Bestimme die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die unendliche Reihe
$$\sum_{n=16}^\infty \frac{1}{n \cdot \log n \cdot \log\log n \cdot (\log\log\log n)^\alpha}$$
divergiert. (6 Punkte)

4. Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume (mit Begründung)?
   (a) Die Menge aller regulären Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   (b) Die Menge aller differenzierbaren Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. (4 Punkte)

5. (a) Sind die folgenden Abbildungen linear oder affin?
      i. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = (x+1, 2y, x+y)^T$
      ii. $D\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $Dp = p'$ (6 Punkte)
   (b) Berechne die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung aus (ii) bezüglich der Standardbasis.