UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Probeklausur zur Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 130 Punkte, 100 Punkte = 100 %, keine Abgabe

1. (a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe absolut?

$$\sum_{k=0}^{\infty} (3x)^{4k}.$$

   (b) Bestimme den Grenzwert. (12 Punkte)

2. Drücke folgende unendliche Reihen durch die elementaren Funktionen $(\log, \exp, \sin, \cos, \tan)$ aus:

   (a) $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{x^n}{n!}$,

   (b) $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log x)^n}{n!}$ mit $x > 0$. (12 Punkte)

3. (a) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n > 1$ und die Funktion $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} & \text{für} \quad x \neq 1, \\ \frac{m}{n} & \text{für} \quad x = 1 \end{cases}$$

   gegeben. Ist f auf $\mathbb{R}^+$ stetig?

   (b) Ist die Abbildung $f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < \sqrt{2}, \\ 1 & \text{für} \quad x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

   auf $\mathbb{Q}$ stetig? (15 Punkte)

4. (a) Bestimme eine stetige bijektive Funktion $f \colon (0, 1] \to [0, \infty)$.

   (b) Zeige, daß es keine stetige bijektive Funktion $f \colon \mathbb{R} \to (0, 1)$ gibt. (12 Punkte)

5. Es sei $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Definiere folgende Begriffe:

   (a) Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$

   (b) ausgezeichnete Zerlegungsfolge

   (c) zu $\mathcal{Z}$ gehörende Riemannsche Ober- und Untersumme

   (d) Integrierbarkeit der Funktion f (12 Punkte)

6. Bestimme eine Stammfunktion von
   (a) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
   (b) $\cos(\log x)$
   (c) $\sqrt{1+x^2}$ (15 Punkte)

7. (a) Gib die Definition des Begriffs der offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ an.
   (b) Beweise: Der Durchschnitt endlich vieler offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist wieder offen.
   (12 Punkte)

8. Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = e^x + \sin y + z$ und $v = \frac{1}{3}(2,2,1)$.
   Bestimme die Richtungsableitung $D_v(f)(0,0,0)$. (10 Punkte)

9. Es sei C eine Matrix vom Typ (q,p) und $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^p$.
   Die Abbildung $\vec{f}\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ist durch $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{x}_0 + (C(\vec{x} - \vec{x}_0)^T)^T$ definiert.
   Gib die Funktionalmatrix $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0)$ an (mit Begründung). (10 Punkte)

10. Es sei $\vec{F} = (F_1, F_2)$ mit

$$\begin{aligned} F_1(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2) &= e^{x_1} \cdot \sin(y_1) + \sin(y_1 y_2) + x_2^2 x_3^3 \\ F_2(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2) &= x_1 \cdot e^{x_3} + e^{y_2} - 1. \end{aligned}$$

Für $\delta > 0$ und $\epsilon > 0$ bezeichne

$$U_\delta = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 |\ ||\vec{x}|| < \delta\} \quad \text{und} \quad V_\epsilon = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 |\ ||\vec{y}|| < \epsilon\}.$$

   (a) Zeige:
   Es gibt $\delta > 0$ und $\epsilon > 0$ und genau eine Funktion $\vec{f}\colon U_\delta \to V_\epsilon$, die auf U_δ stetig und in $\vec{x}_0 = \vec{0}$ total differenzierbar ist, so daß für $\vec{x} \in U_\delta$ und $\vec{y} \in V_\epsilon$ folgendes gilt:

$$\vec{F}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{f}(\vec{x}).$$

   (b) Bestimme die Funktionalmatrix

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{0})$$

(10 Punkte)

11. Es sei $f(x,y) = e^{xy}$. Finde das Taylorpolynom dritter Ordnung in $\vec{x}_0 = \vec{0}$. (10 Punkte)

Viel Erfolg!