ulm university universität uulm

Übungen zur Elemente der Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 31. Oktober 2011, vor den Übungen

1. Es seien $\gamma, \sigma \in S_5$ mit

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Berechne

   (a) $\gamma \circ \sigma$

   (b) $\sigma \circ \gamma$

   (c) $\gamma \circ \sigma^3 \circ \gamma^{-1}$ (8 Punkte)

2. Es sei $\gamma \in S_{12}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 7 & 8 & 1 & 9 & 11 & 12 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimme die Ordnung der kleinsten Untergruppe von S_{12}, die γ enthält.

   (b) Beschreibe eine Untergruppe U von S_{12} mit $|U| = 60$. (4 Punkte)

3. Es sei $I(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$ und

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in I(\sqrt{2}),\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}.$$

   Zeige: G bildet eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation. (4 Punkte)

4. Es sei $V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ die Kleinsche Vierergruppe.
   Finde eine Menge von Matrizen vom Typ $(2, 2)$, die bezüglich der Matrixmultiplikation eine zu V isomorphe Gruppe bildet.

   Hinweis:
   Betrachte $Q = \{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$, die Menge der Ecken eines Quadrats. Was ist die Menge der bijektiven linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$, die Q auf sich selbst abbilden? (4 Punkte)

5. Es sei $W = \{(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z) \colon \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z \in \{-1, 1\}\}$ die Menge der Ecken eines Würfels im $\mathbb{R}^3$.
   Es sei G die Gruppe aller bijektiven linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^3$, die W in sich überführen.

   (a) Bestimme $|G|$.

   (b) Bestimme eine Untergruppe von G der Ordnung 4. (4 Punkte)