Übungen zur Elemente der Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 15. November 2011, vor den Übungen

1. Zeige:

   (a) Jede unendliche zyklische Gruppe ist isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$.

   (b) Eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n ist isomorph zur additiven Gruppe der Restklassen modulo n.

   (5 Punkte)

2. Es sei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen und $\mathbb{Q}^+$ die Menge der positiven rationalen Zahlen. Zeige: Die Gruppen $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ sind nicht isomorph.

   Hinweis:
   Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gilt. (3 Punkte)

3. Es sei $\mathbb{P} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$ und $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   Die Abbildung $r = r(\mathcal{A})$ sei durch

$$r\colon \begin{cases} \mathbb{P} \to \mathbb{P} \\ x \to r(x) \end{cases} \quad \text{mit} \quad r(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{cx+d}, & \text{falls} \quad x \notin \left\{-\frac{d}{c}, \infty\right\} \\ \infty, & \text{falls} \quad x = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & \text{falls} \quad x = \infty,\ c \neq 0 \\ \infty, & \text{falls} \quad x = \infty,\ c = 0 \end{cases}$$

   definiert. Zeige:

   (a) Die Abbildungen $r(\mathcal{A})$ sind bijektiv.

   (b) Die Menge

$$G := \left\{ r(\mathcal{A})\colon \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0 \right\}$$

   ist eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen.

   (c) Die Abbildung $\Phi\colon (GL(2, \mathbb{R}), \cdot) \to (G, \circ)$ ist ein Homomorphismus. Ist Φ auch ein Isomorphismus? Die Antwort ist zu begründen.

   (d) Konstruiere eine Untergruppe $(U, \circ)$ von $(G, \circ)$, die zu S_3 isomorph ist. Die Isomorphie ist nachzuweisen.

   Hinweis:
   Es sei $\mathcal{M} = \{0, 1, \infty\}$. Finde die Abbildungen $r(\mathcal{A})$, die $\mathcal{M}$ auf sich selbst abbilden.

   (10 Punkte)

4. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix vom Typ (n,n) heißt Permutationsmatrix, wenn sie in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Eins enthält und sonst Nullen. Es sei Per_n die Menge aller Permutationsmatrizen vom Typ (n,n).
Weiter sei für $\gamma \in S_n$ die Matrix $P(\gamma)$ durch

$$P(\gamma) = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad i = \gamma(j) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Zeige:

(a) Die Menge Per_n ist eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation.

(b) Die Abbildung $\Phi\colon S_n \to \mathrm{Per}_n$, $\gamma \to P(\gamma)$ ist ein Isomorphismus. (6 Punkte)