Übungen zur Elemente der Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 6. Dezember 2011, vor den Übungen

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$.
   In der Zyklendarstellung von $\gamma \in S_n$ mögen z_j Zyklen der Länge j mit $j = 1, \ldots, n$ vorkommen. Unter dem Zyklentyp $\vec{z}(\gamma)$ der Permutation γ versteht man dann den Vektor $\vec{z}(\gamma) = (z_1, \ldots, z_n)$.
   Zeige: Die Permutationen $\gamma, \sigma \in S_n$ sind genau dann zueinander konjugiert, wenn sie denselben Zyklentyp haben. (4 Punkte)

2. Es sei U eine Untergruppe von G und M die Menge aller zu U konjugierten Untergruppen von G, also $M = \{gUg^{-1} \colon g \in G\}$.
   (a) Zeige: G wirkt auf M durch Konjugation: $(g, V) \to gVg^{-1}$.
   (b) Der Stabilisator dieser Gruppenwirkung heißt der Normalisator von U in G, wofür wir $N_G(U)$ schreiben. Zeige:
      i. $U \trianglelefteq G \Leftrightarrow N_G(U) = G$
      ii. $N_G(U)$ ist die Vereinigung aller Untergruppen V von G, für die $U \trianglelefteq V$ gilt.
   (c) Es sei G eine endliche Gruppe, U eine Untergruppe von G und V eine Untergruppe von U. Zeige: $(G\colon V) = (G\colon U) \cdot (U\colon V)$.
   (d) Es sei $|G| < \infty$, U eine Untergruppe von G und $(G\colon U) = 5$.
      Welche Möglichkeiten bestehen für die Anzahl der Konjugierten von U? (12 Punkte)

3. Es sei G eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge aller Automorphismen von G. Weiter heißt $\Phi \in \mathrm{Aut}(G)$ ein innerer Automorphismus von G, wenn Φ von der Form $\Phi = \Phi(h)\colon G \to G,\ g \to hgh^{-1}$ ist. Die Menge aller inneren Automorphismen von G wird mit $\mathrm{Inn}(G)$ bezeichnet. Zeige:
   (a) Die Menge $\mathrm{Aut}(G)$ ist eine Gruppe bzgl. der Komposition von Abbildungen.
   (b) Es gilt $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.
   (c) Es ist $Z(G) \trianglelefteq G$ und $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$.

      Hinweis:
      Mit $Z(G)$ ist das Zentrum der Gruppe G gemeint. (8 Punkte)