ulm university universität uulm

Probeklausur zur Elemente der Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 130 Punkte, 100 Punkte= 100 %

1. Es sei S_9 die symmetrische Gruppe der Ordnung 9 und

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 6 & 2 & 9 & 8 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme $|\langle\gamma\rangle|$, die Bahnen der Gruppenwirkung von $\langle\gamma\rangle$ auf $M = \{1, \ldots, 9\}$ mit $(\gamma, m) = \gamma(m)$, die Stabilisatoren sämtlicher Elemente von M sowie die Bahnen der Gruppenwirkung dieser Stabilisatoren auf M.

(12 Punkte)

2. Gib die Definition folgender Begriffe an:
   (a) Normalteiler
   (b) Euklidischer Ring
   (c) Integritätsring
   (d) Nullteiler (16 Punkte)

3. (a) Wie heißt der Homomorphiesatz für Gruppen?
   (b) Es sei $n \in \mathbb{N}$, desweiteren S_n die symmetrische Gruppe der Ordnung n und $(H, \cdot)$ die Gruppe mit $H = \{-1, 1\}$ und der Multiplikation "$\cdot$".
   Gib einen Epimorphismus von S_n auf H an. (10 Punkte)

4. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \in GL(n, K)$ und $\vec{b} \in K^n$.
   Weiter sei $\Phi(\cdot, \mathcal{A}, \vec{b})$ die affine Abbildung, die durch $\Phi(\vec{x}, \mathcal{A}, \vec{b}) = \mathcal{A}\vec{x} + \vec{b}$ mit $\vec{x} \in K^n$ gegeben ist.
   Es sei zudem $G = \{\Phi(\cdot, \mathcal{A}, \vec{b})\colon \mathcal{A} \in GL(n, K), \vec{b} \in K^n\}$.
   Die Translation $t(\cdot, \vec{b})$ sei durch $t(\vec{x}, \vec{b}) = \vec{x} + \vec{b}$ gegeben, und es sei $\mathcal{T} = \{t(\cdot, \vec{b}\colon \vec{b} \in K^n\}$.
   Es sei $\circ$ die Komposition von Abbildungen, womit $(G, \circ)$ eine Gruppe ist.
   (a) Weise von den Gruppenaxiomen für $(G, \circ)$ folgende nach:
      i. Existenz des neutralen Elements
      ii. Existenz der Inversen
   (b) Es sei $\vec{u} \in K^n$. Bestimme den Stabilisator $\mathrm{Stab}(\vec{u})$ der Gruppenwirkung von G auf K^n. Für $\vec{u}, \vec{v} \in K^n$ ist ein $\psi \in G$ mit $\mathrm{Stab}(\vec{v}) = \psi\, \mathrm{Stab}(\vec{u})\psi^{-1}$ zu bestimmen
   (c) Zeige, dass $\mathcal{T}$ ein Normalteiler von G ist. (15 Punkte)

5. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $SL(n, K) = \{\mathcal{A} \in GL(n, K)\colon \det(\mathcal{A}) = 1\}$.
   Zeige: $SL(n, K) \trianglelefteq GL(n, K)$. (10 Punkte)

6. Zeige, dass in einem Integritätsring R die Kürzungseigenschaft gilt, d.h. dass für alle $a, x, y \in R$ mit $a \neq 0$ genau dann $ax = ay$ gilt, wenn $x = y$ gilt. (10 Punkte)

7. Es sei $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi\colon a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   Für jede der folgenden Wahlen des Hauptideals I sind folgende Fragen zu beantworten:
   Ist R/I ein Integritätsring? Was ist $|R/I|$?

   (a) $I = (3)$

   (b) $I = (5)$ (10 Punkte)

8. Es sei R ein kommutativer Ring und $N = \{a \in R\colon \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n = 0_R\}$.

   (a) Zeige: N ist ein Ideal von R.

   (b) Bestimme N für den Fall, dass R ein Integritätsring ist. (10 Punkte)

9. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und m keine Primzahl. Zeige, dass $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Integritätsring ist. (10 Punkte)

10. Es sei $f(X) = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

    (a) Zeige, dass f in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

    Hinweis:
    Betrachte $f(X + 1)$.

    (b) Es sei α eine Nullstelle von f in $\mathbb{C}$. Gib eine Basis des Vektorraums $\mathbb{Q}(\alpha)$ über $\mathbb{Q}$ an.

    (c) Es sei $\gamma = 1 + \alpha$. Bestimme γ^{-1} in der Form $\gamma^{-1} = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4 + a_5\alpha^5$.
    (15 Punkte)

11. Es sei $f(X) = X^4 - 2$ und $\sqrt[4]{2}$ die eindeutig bestimmte positive reelle Nullstelle von f.
    Weiter sei $i^2 = -1$ mit $i \in \mathbb{C}$ sowie $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ und $M = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

    (a) Gib eine Basis des Vektorraums M über $\mathbb{Q}$ an.

    (b) Faktorisiere f in irreduzible Elemente von $L[X]$ bzw. von $M[X]$. (12 Punkte)

Viel Erfolg!