UNIVERSITÄT ULM

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 2

Abgabe: Mittwoch, 27. April 2011, vor den Übungen

1. (a) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Finde eine Faktorisierung von $a^n - b^n$, in der einer der Faktoren $a - b$ ist.

   (b) Zeige: Ist $2^m + 1$ für $m \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, dann ist m von der Form $m = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}$.

   (c) Wiederum sei $k \in \mathbb{N}$. Die k- te <u>Fermatzahl</u> F_k ist durch $F_k := 2^{2^k} + 1$ definiert.
   Zeige: $F_k = F_0 \cdots F_{k-1} + 2$

   (d) Zeige: Für $k \neq l$ gilt: $ggT(F_k, F_l) = 1$.

   (e) Folgere aus dem Ergebnis von d), daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

   (f) Auf Carl- Friedrich Gauß geht folgender Satz zurück:
   Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist ein regelmäßiges Polygon mit n Ecken genau dann unter Verwendung von Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form
   $$n = 2^\alpha \cdot \prod_k F_k$$
   mit paarweise verschiedenen Fermatschen Primzahlen F_k und $\alpha, k \in \mathbb{N}_0$ ist.
   Für welche $n \in \mathbb{N}$ mit $3 \leq n \leq 35$ ist das regelmäßige Polygon mit n Ecken unter Verwendung von Zirkel und Lineal konstruierbar? (14 Punkte)

2. (a) Unter der Teilersumme σ einer natürlichen Zahl n versteht man die Summe aller ihrer Teiler.
   i. Was ist $\sigma(p)$, wenn p eine Primzahl ist?
   ii. Zeige: $\sigma(p^\alpha) = \dfrac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $\alpha \in \mathbb{N}$.
   iii. Zeige: $\sigma(p \cdot q) = \sigma(p) \cdot \sigma(q)$ mit Primzahlen p und q.

   (b) Eine Primzahl q von der Form $q = 2^m - 1$ mit $m \in \mathbb{N}$ heißt <u>Mersennesche Primzahl</u>.
   Zeige: Wenn $q = 2^m - 1$ eine Primzahl ist, ist bereits m eine Primzahl.

   (c) Eine natürliche Zahl m heißt <u>vollkommen</u>, wenn m die Summe seiner echten Teiler ist, also ohne die Zahl m selbst.
   Zeige: Ist m von der Form $m = 2^{p-1} \cdot q$, wobei $q = 2^p - 1$ eine Mersennesche Primzahl ist, so ist m vollkommen. (10 Punkte)