UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 11. Mai 2011, vor den Übungen

1. Es sei $d \in \mathbb{Z}$ und $I(d) := \{a + b \cdot \sqrt{d} |\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

   (a) Zeige: Ist $\alpha, \beta \in I(d)$, so sind auch $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta \in I(d)$.

   (b) Es sei $N(\alpha) = a^2 - db^2$ die Norm von α. Zeige: $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$.

   (c) Man sagt:
   $$\alpha | \beta \Leftrightarrow \exists \gamma \in I(d) \quad \text{mit } \beta = \alpha \cdot \gamma$$
   Weiter heißt $\epsilon \in I(d)$ <u>Einheit</u>, wenn $\epsilon | 1$.
   Zeige, daß ϵ genau dann eine Einheit ist, wenn $N(\epsilon) = \pm 1$ ist.

   (d) Zeige, daß sämtliche Einheiten von $I(2)$ von der Form $\epsilon = \pm(\sqrt{2} + 1)^n$ sind.

   <u>*Hinweis:*</u>
   Führe den Beweis wie folgt: Es sei $\epsilon = x + y \cdot \sqrt{2}$ mit $x, y > 0$, x kleinstmöglich und ϵ habe nicht die geforderte Form. Bestimme $\epsilon(\sqrt{2} - 1)$ und betrachte $N(\epsilon)$.

   (e) Finde sämtliche Lösungen von $x^2 - 2y^2 = 1$. (18 Punkte)

2. Ein Stein liegt auf einem Feld eines $n \times n$- Schachbrettes.
   Folgende Züge sind erlaubt:

   - eine Verschiebung um ein Feld nach oben,
   - eine Verschiebung um ein Feld nach rechts
   - und eine Verschiebung auf das links unten anstoßende Feld.

   Zeige, daß es unmöglich ist, den Stein nach diesen Regeln so zu ziehen, daß er nacheinander alle Felder genau einmal besucht und seine Wanderung auf dem rechten Nachbarfeld des Ausgangsfeldes beendet.

   <u>*Hinweis:*</u>
   Nimm an, eine solche Wanderung sei mit x Zügen der ersten Art, y Zügen der zweiten und z Zügen der letzten Art möglich und führe die zu einem Widerspruch. (6 Punkte)