UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 6

Abgabe: Freitag, 15. Juli 2011, vor den Übungen

1. Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$ nichtleer.
   Es sei $d(\alpha, x_0)\colon x \to \mathcal{A}(x - x_0) + x_0$ mit

   $$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

   die Drehung mit Fixpunkt x_0 um den Winkel α.

   (a) Zeige:
   Ist $d(\alpha, x_0) \in \mathrm{Sym}(\mathcal{M})\backslash\{id\}$, so gibt es $\beta \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, so daß $d(\beta, x_0) \in \mathrm{Sym}(\mathcal{M})\backslash\{id\}$ ist.

   (b) Ein $x_0 \in \mathbb{R}^2$ heißt wesentlicher Fixpunkt von $\mathrm{Sym}(\mathcal{M})$, falls es ein $\tau \in \mathrm{Sym}(\mathcal{M})\backslash\{id\}$ mit Fixpunkt x_0 gibt.
   Zeige: Ist (x_0, y_0) ein Paar von wesentlichen Fixpunkten von $\mathrm{Sym}(\mathcal{M})$ mit $x_0 \neq y_0$, so gibt es ein Paar von wesentlichen Fixpunkten von $\mathrm{Sym}(\mathcal{M})$ mit $|y_1 - x_1| \geq \sqrt{2} \cdot |y_0 - x_0|$.

   (c) Zeige: Ist $\mathcal{M}$ beschränkt, und $\mathrm{Sym}(\mathcal{M})\backslash\{id\} \neq \emptyset$, so gibt es ein x_0, so daß alle Elemente von $\mathrm{Sym}(\mathcal{M})$ Drehungen um den Fixpunkt x_0 sind.

   (d) Ist $\mathcal{M}$ kompakt und $\mathrm{Sym}(\mathcal{M})$ eine unendliche Menge, so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}^2$ mit

   $$\mathrm{Sym}(\mathcal{M}) = \{d(\alpha, x_0)\colon \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

   Hinweis:
   Zeige: $\inf\{\alpha > 0\colon \exists d(\alpha, x_0) \in \mathrm{Sym}(\mathcal{M})\} = 0.$ (16 Punkte)

2. Bestimme die Extremalpunkte folgender Mengen:

   (a) $\mathcal{M}_1 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3\colon x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + 2y + 3z \leq 6\}$

   (b) $\mathcal{M}_2 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ (8 Punkte)