UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Probeklausur zur Geometrie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 130 Punkte, 100 Punkte= 100 %

keine Abgabe

1. Gib Definitionen für die folgenden Begriffe:
   (a) Polytop
   (b) Polyeder
   (c) Extremalpunkt
   (d) stereographische Projektion (16 Punkte)

2. Gib Beispiele für die folgenden Objekte oder zeige, daß solche Objekte nicht existieren:
   (a) nicht kompaktes Poyeder
   (b) nicht abgeschlossenes Polyeder des $\mathbb{R}^n$ (12 Punkte)

3. Es sei $z_1 = i$, $z_2 = 3i$ und $w_1 = 4i$.
   (a) Finde $w_2 \in \mathbb{H}$, so daß die beiden hyperbolischen Abstände $d(z_1, z_2)$ und $d(w_1, w_2)$ gleich sind.
   (b) Finde eine Bewegung der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$, die die Strecke $\overline{z_1 z_2}$ in die Strecke $\overline{w_1 w_2}$ überführt. (10 Punkte)

4. Formuliere zwei beliebige Kongruenzaxiome der Euklidischen Ebene. (10 Punkte)

5. (a) Wie ist die Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ definiert?
   (b) Beschreibe die Menge der Bewegungen der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$ und zeige, daß es sich um eine Gruppe handelt.

   <u>*Hinweis:*</u>
   Es kann ohne Beweis verwendet werden, daß $SL(2, \mathbb{R})$ eine Gruppe ist.
   (c) Bestimme den Stabilisator des Punktes i. Das Ergebnis ist zu begründen.
   (12 Punkte)

6. Die zwei hyperbolischen Geraden g_1 und g_2 seien durch

$$g_1 := \{it\colon t > 0\} \quad \text{und} \quad g_2 := \{z\colon |z-1| = \sqrt{2},\ \Im(z) > 0\}$$

definiert. Bestimme den Schnittwinkel δ zwischen g_1 und g_2, wobei die beiden Geraden so parametrisiert sein sollen, daß $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ gelte. (15 Punkte)

7. Ein Polyeder $\mathcal{P}$ sei durch

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\colon \varphi_j(x,y,z) \geq b_j,\ 1 \leq j \leq 4 \right\}$$

mit $\varphi_1(x,y,z) = x - y$, $\varphi_2(x,y,z) = y$, $\varphi_3(x,y,z) = z$ und $\varphi_4(x,y,z) = -(x + 2y + 3z)$ sowie $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ bzw. $b_4 = -6$ definiert.
Bestimme die Extremalpunkte von $\mathcal{P}$ (mit Begründung). (15 Punkte)

8. Es sei $\mathcal{P}$ ein Platonischer Körper. Weiter sei q die Anzahl der regulären p- Ecke, die in einer Ecke von $\mathcal{P}$ zusammentreffen. Gib p und q für folgende Objekte an:

   (a) Tetraeder

   (b) Oktaeder

   (c) Ikosaeder (15 Punkte)

9. Ein Oktaeder besitze im xyz- Koordinatensystem die sechs Ecken $(\epsilon, 0, 0)^T$, $(0, \epsilon, 0)^T$ und $(0, 0, \epsilon)^T$ mit $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Bestimme den Radius der umbeschriebenen Sphäre, auf der die sechs Ecken liegen, und der einbeschriebenen Sphäre, welche die acht Seitenflächen berührt.

   Hinweis:
   Es kann ohne Beweis angenommen werden, daß die einbeschriebene Sphäre die Seitenflächen in den Schwerpunkten berührt. Das sind diejenigen Punkte im Inneren der Dreiecke, die von den drei Eckpunkten den gleichen Abstand haben.
   (13 Punkte)

10. Ein Hexaeder besitze wiederum im xyz- Koordinatensystem die acht Ecken $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)^T$ mit $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z \in \{-1, 1\}$. Die Mittelpunkte der sechs Seitenquadrate sind die Ecken eines platonischen Körpers.
Um welchen handelt es sich (mit kurzer Begründung)? (12 Punkte)

Viel Erfolg!