Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 11. Januar 2012, vor den Übungen

1. Es sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n$ und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung.
   Zeige:

   (a) Aus $\varphi^2 = \varphi$ folgt $V = \mathrm{Kern}(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi)$.

   (b) Es gilt $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi) \cap \mathrm{Kern}(\varphi)) = \mathrm{rg}(\varphi) - \mathrm{rg}(\varphi^2)$. (3 Punkte)

2. Es seien V und W Vektorräume über K sowie U_1 und U_2 Unterräume von V mit $V = U_1 \oplus U_2$.
   Weiter seien $\varphi_i\colon U_i \to W$ lineare Abbildungen für $i = 1, 2$.
   Zeige, dass es genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ mit $\varphi_{|_{U_i}} = \varphi_i$ für $i = 1, 2$ gibt. (2 Punkte)

3. Es seien $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$ zwei Gruppen. Eine Abbildung $\Phi\colon G \to H$ heißt ein Gruppenhomomorphismus, wenn $\Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \circ \Phi(y)$ für alle $x, y \in G$ gilt.
   Je nach weiteren Eigenschaften spricht man von einem Iso-, Endo- oder Automorphismus, vgl. dazu die entsprechenden Definitionen für Vektorraummorphismen aus der Vorlesung.

   (a) Prüfe in Abhängigkeit von einem $a \in G$ folgende Abbildungen auf die obigen Eigenschaften:

      i. $c_a\colon G \to G$, $x \to a$

      ii. $\lambda_a\colon G \to G$, $x \to a \cdot x$

      iii. $\varphi_a\colon G \to G$, $x \to a \cdot x \cdot a^{-1}$

   (b) Was gilt für φ_a, wenn G abelsch ist? (4 Punkte)

4. (a) Es seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   über K mit $\mathbb{R} \subset K$ gegeben. Bestimme alle möglichen Produkte zweier Matrizen.

   (b) Die Matrix $R \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ habe Diagonalgestalt, das bedeutet

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

   für $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Es gelte $r_1 \neq r_2$ und $S \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ kommutiere mit R, also gelte $RS = SR$.
   Zeige: S hat auch Diagonalgestalt.

(c) Es seien $X, Y \in K^{(n,n)}$. Beweise oder widerlege:

$$XY = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ oder } Y = 0,$$

wobei $0 \in K^{(n,n)}$ die Nullmatrix bezeichne.

(d) Es sei $Z \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ mit $n \geq 2$ und

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \lambda_1 & \ddots & {\scriptstyle 0} & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & \lambda_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Hauptdiagonalelemente und alle Elemente überhalb der Hauptdiagonalen verschwinden, in der unteren Nebendiagonalen mindestens ein $\lambda_i \neq 0$ mit $i = 1, \ldots, n-1$ ist und die übrigen Elemente beliebig sind. Weiter bezeichne $\mathcal{Z}(n)$ die Menge aller Matrizen Z mit obiger Gestalt vom Typ (n, n).
Bestimme $\min\{k \in \mathbb{N} \colon Z^k = 0 \text{ für alle } Z \in \mathcal{Z}(n)\}$ mit $0 \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. (11 Punkte)

5. Es sei $V \subset L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Raum der Polynome vom Grad kleiner gleich n.

   (a) Es sei $\varphi \colon V \to V$, $p \to p(x) + p(-x)$.

      i. Zeige: φ ist linear.

      ii. Bestimme $\mathrm{Bild}(\varphi)$ und $\mathrm{Kern}(\varphi)$.

   (b) Es sei $n = 2$ und $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ eine Basis von V und $\psi \colon V \to V$ mit $p \to \psi(p) = p(x+1) + p'(x)$.
   Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\psi, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ der Abbildung ψ. (4 Punkte)

Wir wünschen Euch allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr 2012!