Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 18. Januar 2012, vor den Übungen

1. (a) Beweise Satz 3.5.1 aus der Vorlesung:
   Der $K^{(m,n)}$ bildet bzgl. der Matrizenaddition und Skalarmultiplikation einen Vektorraum über K mit Dimension $\dim K^{(m,n)} = m \cdot n$.

   (b) Warum bildet der $K^{(m,n)}$ keinen Ring?

   (c) Unter welchen Voraussetzungen liegt ein Matrizenring vor?

   (d) Es seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ durch
   $$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   gegeben. Ergänze $\{A, B, C\}$ zu einer Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^{(2,2)}$. (8 Punkte)

2. Wir betrachten $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $K = \mathbb{R}$, und es sei $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch
   $$\varphi(a) := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$
   für $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definiert. Zeige:

   (a) $\varphi \in L(\mathbb{C},\ \mathbb{R}^{2\times 2})$ und $\mathrm{Bild}(\varphi) \cong \mathbb{C}$

   (b) $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ für $a, b \in \mathbb{C}$

   (c) $\varphi(\overline{a}) = \varphi(a)^T$ für $a \in \mathbb{C}$ (5 Punkte)

3. Für eine quadratische Matrix A definieren wir rekursiv $A^0 = E$ sowie $A^{k+1} = A^k \cdot A$ $(= A \cdot A^k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Eine Matrix $A \in K^{(n,n)}$ heißt nilpotent, falls $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt.
   Zeige oder widerlege mittels eines Gegenbeispiels:

   (a) Sind $A, B \in K^{(n,n)}$ zwei nilpotente Matrizen, so ist auch deren Summe $A + B$ nilpotent.

   (b) Ist $A \in K^{(n,n)}$ nilpotent, so gibt es $\vec{x} \in K^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{x} = \vec{0}$. (4 Punkte)

4. (a) Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ gegeben. Die Spur von A ist definiert als $\mathrm{Spur}\, A := \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\nu}$.
   Zeige:

      i. $\mathrm{Spur}(A + B) = \mathrm{Spur}\, A + \mathrm{Spur}\, B$

      ii. $\mathrm{Spur}(\alpha A) = \alpha \cdot \mathrm{Spur}\, A$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$

      iii. $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$

   (b) Es sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$. Beweise: Es gibt keine Matrix $X \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ mit $AX - XA = E_n$. (5 Punkte)

5. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m < n$. Finde zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $B \in \mathbb{R}^{(n,m)}$, so dass $AB = E$ aber $BA \neq E$ gilt. (2 Punkte)