Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Mittwoch, 25. Januar 2012, vor den Übungen

1. Bestimme in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & t & t+1 & 2t & 5 \\ 2 & t^2 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 4-t & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

2. Berechne für die beiden folgenden Matrizen $A \in K^{(m,n)}$ jeweils $\operatorname{rg} A$, $\operatorname{Kern} A = \{\vec{x} \in K^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$, $\dim \operatorname{Kern} A$ und bestimme die Lösungsgesamtheit von $A\vec{x} = \vec{b}$:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,5)}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,5)}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ (6 Punkte)

3. Es sei $A \in K^{(n,n)}$ eine quadratische Matrix. Zeige, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

   (1) Für alle $\vec{b} \in K^n$ besitzt $A\vec{x} = \vec{b}$ mindestens eine Lösung $\vec{x} \in K^n$.

   (2) Die homogene Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ besitzt nur die triviale Lösung.

   (3) Die Matrix A ist regulär. (3 Punkte)

4. Es sei $A \in K^{(n,n)}$ und $m, n \in \mathbb{N}$.

   (a) Zeige:
   $$E_n - A^m = (E_n - A) \cdot \sum_{\nu=0}^{m-1} A^\nu = \sum_{\nu=0}^{m-1} A^\nu \cdot (E_n - A)$$

   (b) Nun sei A nilpotent, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$.

      i. Zeige, dass dann $\operatorname{rg} A < n$ gilt.

      ii. Weiterhin ist
      $$(E_n - A)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{k-1} A^\nu.$$

      iii. Gibt es eine nilpotente Matrix $A \in K^{(n,n)}$ mit $\operatorname{rg} A = n - 1$? (5 Punkte)

5. Beweise die folgenden Aussagen für $m, n \in \mathbb{N}$

   (a) Für $A, B \in K^{(m,n)}$ gilt stets $\operatorname{rg}(A + B) \leq \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B)$.

   (b) Für $A \in K^{(m,n)}$ und $b \in K^m$ gilt $\operatorname{rg}(A|b) \in \{\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(A) + 1\}$. (4 Punkte)

6. Es seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Falls $a_1 - a_0, \ldots a_n - a_0$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden, sagt man, dass diese $n+1$ Vektoren $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ sich in allgemeiner Lage befinden.
   Zeige: Jeder Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$a = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu a_\nu$$

   mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = 1$. (3 Punkte)