Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 8. Februar 2012, vor den Übungen

1. Es sei $A \in \mathbb{R}^{(3,4)}$ mit
$$\operatorname{Kern} A^T = \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$
   (a) Bestimme $\operatorname{rg} A$, $\operatorname{rg} A^T$ und $\dim \operatorname{Kern} A$.

   (b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist
$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ \lambda^2 \\ \lambda + 2 \end{pmatrix}$$
   lösbar? (4 Punkte)

2. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij})$ eine Matrix vom Typ (n, n) mit $a_{ij} \in K$, die durch
$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad i > j \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$
   definiert sind.
   Bestimme für ein beliebiges $\vec{b} \in K^n$ die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ über K. (4 Punkte)

3. Im $\mathbb{R}^n$ sei ein Unterraum U durch die Parameterdarstellung
$$U := \left\{ \vec{x} \colon \vec{x} = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \vec{c}_\mu, \lambda_\mu \in \mathbb{R}, \vec{c}_\mu \in \mathbb{R}^n \right\}$$
   gegeben. Ermittle ein lineares Gleichungssystem $B\vec{x} = \vec{0}$ minimaler Gleichungszahl, dessen Lösung genau U ist. (3 Punkte)

4. Es sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen und $q > 1$.
   Weiter sei $C \subset \mathbb{F}_q^n$ ein linearer Code der Länge n mit Alphabet $\mathbb{F}_q$, d.h. ein Unterraum von $\mathbb{F}_q^n$.
   Eine Matrix $H \in \mathbb{F}_q^{(m,n)}$ mit $\operatorname{rg}(H) = m$ heißt Kontrollmatrix von C, wenn $C = \{\vec{x} \in \mathbb{F}_q^n \colon H\vec{x} = \vec{0}\}$.

   (a) Wieviele Codeworte besitzt der Code C?

   (b) Wieviele Kontrollmatrizen hat der Code C?

   (c) Gib eine Kontrollmatrix für den $(7, 4)$- Hammingcode an, die von der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   verschieden ist. (6 Punkte)

5. Es sei K ein Körper, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \ldots, x_m \in K$ paarweise verschieden. Weiter sei

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \ldots & x_m^{n-1} & x_m^n \end{pmatrix}$$

(a) Zeige: $\mathrm{rg}(\mathcal{M}) = \min\{m, n+1\}$.

Hinweis:
O.B.d.A kann $m \leq n+1$ angenommen werden.
Der Beweis kann dann wie folgt durch vollständige Induktion nach n geführt werden: Im ersten Schritt werden das x_1- fache der $(n-1)$- ten Spalte von der n- ten Spalte, das x_1- fache der $(n-2)$- ten Spalte von der $(n-1)$- ten Spalte, …, das x_1- fache der ersten Spalte von der zweiten Spalte subtrahiert. Dann wird die erste Zeile von sämtlichen anderen Zeilen subtrahiert.

(b) Es seien $x_1, \ldots, x_{n+1}$ paarweise verschieden und $b_1, \ldots, b_{n+1} \in K$ beliebig. Zeige, dass es genau ein Polynom $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ vom Grad kleiner gleich n mit $P(x_j) = b_j$ für $j = 1, \ldots, n+1$ gibt.

(c) Zeige, dass ein Polynom n- ten Grades höchstens n Nullstellen besitzt. (7 Punkte)