Probeklausur zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 130 Punkte, 100 Punkte= 100 %

notwendige Punktzahl zum Bestehen der Probeklausur: 20 Punkte

1. Gegeben seien die Ebene E_1 durch die Punkte

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

und die Ebene E_2 durch $E_2\colon -32x + 25y + z = 68$, welche sich in einer Geraden g schneiden. Bestimme eine Punkt- Richtungs- Gleichung dieser Schnittgeraden. (8 Punkte)

2. Überprüfe, ob die gegebenen Mengen zusammen mit den angegebenen Verknüpfungen Gruppen bilden:

   (a) $(F, +)$ mit $F := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ und $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$.

   (b) $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ y_1 \cdot y_2 \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. (7 Punkte)

3. Es sei M eine nichtleere Menge.
Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M, d.h. $\mathcal{P}(M) := \{N\colon N \subseteq M\}$, wird für $A, B \in \mathcal{P}(M)$ folgende Verknüpfung definiert:

$$A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A),$$

die sogenannte symmetrische Differenz.
Zeige, dass $\mathcal{P}(M)$ versehen mit der Verknüpfung Δ eine abelsche Gruppe bildet. (12 Punkte)

4. Prüfe für die folgenden Beispiele, ob die Tripel $(V, K, \odot)$ Vektorräume bilden (mit Beweis oder Gegenbeispiel):

   (a) Es sei K ein beliebiger Körper, $V = A \times B$ mit beliebigen K- Vektorräumen A und B sowie $\lambda \odot (\vec{a}, \vec{b}) = (\lambda \odot_1 \vec{a}, \lambda \odot_2 \vec{b})$, wobei $\odot_1$ bzw. $\odot_2$ die Skalarmultiplikationen aus A bzw. B sind.

   (b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, -\lambda y)$ (9 Punkte)

5. Bildet die Menge der Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ einen Unterraum der Menge der Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$?
(6 Punkte)

6. Finde die Lösungsmenge des folgenden LGS mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, t, t+1\}$ mit den Verknüpfungen $1 + 1 = 0$ und $t^2 = t + 1$:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +tx_2 & +(t+1)x_3 & = 1 \\ tx_1 & +tx_2 & +x_3 & = 1 \\ (t+1)x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1. \end{array}$$

(10 Punkte)

7. Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & =0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & +sx_3 & =0 \end{array}$$

hat sicher die triviale Lösung. Für welchen Wert von s ist dieses LGS nichttrivial lösbar? Gib für diesen Wert von s auch die Lösung des LGS an. (8 Punkte)

8. (a) Auf $K := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ seien die Operationen $+$ und $\cdot$ durch

$$(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d) \quad \text{und} \quad (a,b)\cdot(c,d) := (ac, bd)$$

definiert. Weiter sei $0_K := (0,0)$ und $1_K := (1,1)$. Ist K ein Körper?

(b) Welche Teilmengen von $\mathbb{Q}$ sind Körper bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation? (10 Punkte)

9. Es sei V ein achtdimensionaler Vektorraum und U_1 und U_2 Unterräume von V mit $\dim U_1 = 6$ und $\dim U_2 = 7$. Zeige: $\dim(U_1 \cap U_2) \in \{5, 6\}$. (6 Punkte)

10. Gib eine Definition folgender Begriffe an:

(a) Linearkombination von Vektoren

(b) Körper (10 Punkte)

11. Es seien die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{Q}^4$ gegeben.

(a) Bestimme $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ und $\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$

(b) Ist $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ linear unabhängig?

(c) Ist $\{(3,2,1,0)^T, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ linear unabhängig?

(d) Ist jeder der Einheitsvektoren von $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ linear unabhängig? (14 Punkte)

12. (a) Es seien die reellen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimme die Produkte AC, BA, BC und A^2, sofern diese definiert sind.

(b) Zeige: Für $A, B \in K^{(n,n)}$ gilt: $AB = BA \Leftrightarrow (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. (18 Punkte)

13. Entscheide, ob die folgenden Abbildungen linear sind und bestimme in diesem Fall Rang und Defekt:

(a) $K = \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ x \\ \alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $K = \mathbb{C}$, $g\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(z,w) \to \Re(z) + i \cdot \Im(w)$ (12 Punkte)

Viel Erfolg!